

Лекции по 2-мерной гиперболической теории поля

Д. Г. Павлов, НИИ ГСГФ (Фрязино), С. С. Кокарев, НИИ ГСГФ (Фрязино), РНОЦ "Логос", (Ярославль)

Аннотация

Лекции освещают активно развивающийся в настоящее время подход к объединенному описанию пространства-времени-материи, опирающийся на ассоциативно-коммутативные алгебры и индуцируемые ими геометрии Бервальда-Моора. Материал лекций составляет часть программы летней Школы-2011 по финслеровой геометрии и ее физическим приложениям.

Lectures on 2-dimensional hyperbolic field theory.

D. G. Pavlov, RIHSGP (Fryazino), S. S. Kokarev RIHSGP (Fryazino), RSEC "Logos" (Yaroslavl)

Abstract

The lectures gives presentation of an actively developing approach to the unified description of space-time-matter, based on associative-commutative algebras and induced Berwald-Moor geometries. The matter of the lectures is a part of program of the summer School-2011 on Finslerian geometry and its applications.

1. Введение

Интересная возможность физических приложений h -голоморфных функций двойной переменной (см. [1]-[2]) связана с интерпретацией конформных преобразований, определяемых h -голоморфными функциями, как переходов между неинерциальными системами отсчета в плоском двумерном пространстве-времени. Включение в рассмотрение конформных деформаций пространства-времени естественным

образом расширяет рамки двумерной специальной теории относительности, в кинематике которой задействуются лишь изометрические преобразования, трактуемые как переходы между инерциальными системами отсчета. Хорошо известно, что подобная возможность в принципе отсутствует в трех- и четырехмерных псевдоевклидовых пространствах (из-за отсутствия соответствующей бесконечномерной конформной группы симметрий). Менее известно, что такая возможность имеется в двумерии, и совсем мало известно о наличии бесконечномерных конформных групп в целой серии плоских геометрий финслерова типа, — пространствах с метрикой Бервальда-Моора (частным случаем которых, кстати, является и пространство двойных чисел [5, 6]).

Подход, о котором пойдет речь в настоящих лекциях, навеян аналогией свойств двойных чисел и функций от них со свойствами комплексных чисел и функций от них. Хорошо известно, что среди приложений комплексного анализа особое место занимает теория комплексного потенциала, которая эффективно работает при решении эллиптических 2-мерных задач математической физики. Компоненты любой аналитической функции комплексной переменной являются сопряженными гармоническими функциями и решают некоторую статическую (например, в случае электростатики) или стационарную (в случае стационарных течений в гидродинамике идеальной жидкости) задачу в пространстве вне источников с соответствующими граничными условиями. Плоскость двойной переменной, в отличие от комплексной плоскости, обладает естественной псевдоевклидовой структурой и поэтому теория гиперболического потенциала решает некоторые гиперболические задачи математической физики в 2-мерном пространстве-времени. Отталкиваясь от этой аналогии, мы идем в своих построениях дальше и даем физико-геометрическую интерпретацию гиперболическому потенциалу как универсальному полю, отвечающему как за геометрические свойства пространства-времени, так и за физические свойства его материального наполнения.

Лекции состоят из пяти частей. В первой части мы приводим сведения из теории двойных чисел и функций от них, необходимые для дальнейшего изложения. Во-второй части мы рассматриваем кинематические и геометрические аспекты подхода и выводим формулу для относительной конформной деформации хода часов, которую можно

использовать в качестве основы для экспериментальных тестов теории или для сравнения ее предсказаний с соответствующими предсказаниями СТО и ОТО. Третья часть посвящена принципам динамической теории гиперболического потенциала. В этой части мы рассматриваем неголоморфные гиперболические потенциалы. Мы постулируем, что именно неголоморфность гиперболического потенциала отличает области пространства-времени, заполненные материей, от вакуумных областей. Важное соотношение (4.70), возникающее как условие интегрируемости уравнений движения, обеспечивает согласованность и содержательность физической интерпретации рассматриваемого подхода. Применяя стандартные теоретико-полевые рассуждения, мы получаем явный вид компонент тензора энергии-импульса гиперболического поля-вещества (в пустоте, где потенциал голоморфен, эти компоненты всегда обращаются в нуль или описывают энергию физического вакуума $\mathcal{U}(0)$) и выводим выражения, связывающие гиперболический потенциал с локальными плотностью энергии и давлением. Для иллюстрации подхода мы рассматриваем задачу о нахождении гиперболического потенциала, управляющего статической вселенной с источником в виде одномерного покоящегося упругого стержня. Четвертая часть лекций содержит общие сведения по алгебре и геометрии 3-чисел. Наконец, в разделе 6 мы излагаем некоторые предварительные заготовки для обобщения излагаемого подхода на случай большего числа измерений (на примере \mathcal{H}_3).

Основные сведения по алгебре двойных чисел и теории относительности предполагаются известными. Читатель может познакомиться с ними по руководствам и статьям [1, 3, 5, 7].

2. Некоторые предварительные сведения

2.1. СТО на плоскости двойной переменной

Остановимся вкратце на некоторых ключевых положениях 2-мерной СТО, формулируя их в терминах алгебры двойных чисел. Будем отождествлять элементы \mathcal{H}_2 с точками-событиями 2-мерного пространства-времени Минковского \mathcal{M}_2 . Таким образом, с каждым элементом $h \in \mathcal{H}_2$ мы ассоциируем 2-мерный радиус-вектор-событие $h = t + jx$ ($j^2 = +1$). Вводя базис 1-форм $\{dh, d\bar{h}\}$, рассмотрим веще-

ственную квадратичную форму:

$$\eta = \text{Re}(dh \otimes d\bar{h}) = dt \otimes dt - dx \otimes dx. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) иллюстрирует глубокую связь алгебры двойных чисел и псевдоевклидовой геометрии, а ее поличисловые версии в высших измерениях приводят к метрическим пространствам Бервальда-Моора, которых мы здесь не касаемся.

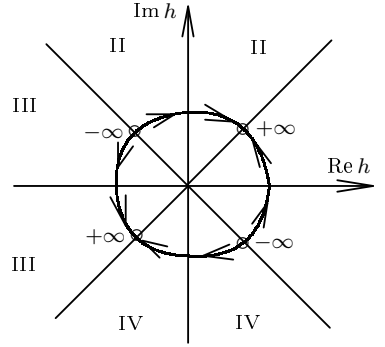


Рис. 2.1: Область $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$ изменения угла ψ на плоскости \mathcal{H} . Ориентация согласована в противоположных клиньях и противоположна в соседних. Для различия углов в различных клиньях можно нумеровать угол ψ индексом k : ψ_k , ($k = 1, 2, 3, 4$).

По аналогии с комплексными числами для всякого двойного числа можно определить его экспоненциальное и гиперболически-тригонометрическое представления:

$$h = \epsilon \rho e^{j\psi} = \epsilon \rho (\cosh \psi + j \sinh \psi),$$

где для каждого из клиньев I, II, III, IV, представленных на рис. 2.1, имеют место следующие определения величин:

$$\begin{aligned} \text{I: } & \epsilon = 1, & \rho &= \sqrt{t^2 - x^2}, & \psi &= \text{Arth}(x/t); \\ \text{II: } & \epsilon = j, & \rho &= \sqrt{x^2 - t^2}, & \psi &= \text{Arth}(t/x); \\ \text{III: } & \epsilon = -1, & \rho &= \sqrt{t^2 - x^2}, & \psi &= \text{Arth}(x/t); \\ \text{IV: } & \epsilon = -j, & \rho &= \sqrt{x^2 - t^2}, & \psi &= \text{Arcth}(t/x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Величины ϱ и ψ , определенные в каждом из клиньев формулами (2.2), называются *модулем* и *аргументом* двойного числа h . Отметим, что множество двойных чисел с нулевым модулем ϱ не описывается ни одной из координатных карт введенной выше гиперболической полярной системы координат. Множество двойных чисел вида

$$h_0 + h_1(1 \pm j), \quad (2.3)$$

(h_0, h_1 — произвольные двойные числа) будем называть *конусом числа* h_0 и обозначать $\text{Con}(h_0)$. Физически множество $\text{Con}(h_0)$ — это множество событий, связанных с h_0 световыми сигналами. Алгебраические векторы положений $h - h_0$, где $h \in \text{Con}(h_0)$, являются делителями нуля в алгебре \mathcal{H}_2 .

Изометрии метрики (2.1) образуют группу Пуанкаре $P(1, 1)$. Ее однородная часть (1-параметрическая группа Лоренца Log) реализуется умножениями на элементы алгебры единичного модуля вида $\epsilon e^{j\psi}$. При этом числа с $\epsilon = 1$ описывают причинные преобразования Лоренца, не меняющие ориентации времени, а остальные варианты описывают либо сверхсветовые преобразования Лоренца, либо преобразования Лоренца с обращением времени. Переходя к параметру скорости:

$$v = \tanh \psi, \quad (2.4)$$

приходим к формуле для активных преобразований Лоренца:

$$h' = e^{j\psi} h = [(1-v^2)^{-1/2} + jv(1-v^2)^{-1/2}](t + jx) = \frac{t + vx}{\sqrt{1-v^2}} + j \frac{x + vt}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (2.5)$$

Отметим, что описание пассивных преобразований Лоренца, соответствующих смене системы отсчета, реализуется элементами коалгебры \mathcal{H}_2^* [2].

Изометрии метрики (2.1) сохраняют класс инерциальных систем отсчета, которые на плоскости \mathcal{H}_2 изображаются семействами параллельных прямых с направляющими векторами положительного квадрата нормы $h\bar{h}$. Произвольное движение точечной частицы описывается криволинейной мировой линией, на которой определено векторное поле 2-скорости

$$u = \frac{dh}{ds}, \quad (2.6)$$

где s — параметр псевдоевклидовой длины. При этом $|u| = 1$, а физическая скорость v определяется отношением:

$$v = \frac{\operatorname{Im} u}{\operatorname{Re} u}, \quad (2.7)$$

либо эквивалентно формулами (2.4)-(2.5). Физически вектор 4-скорости задает направление линий собственного времени пробного тела или системы отсчета (необязательно инерциальной) в пространстве-времени. При этом факт его единичности, который следует непосредственно из определения, выражает *постулат о глобальном постоянстве хода собственного времени любых часов во всех системах отсчета*. Другой формой выражения этого постулата является *совпадение собственного времени часов с длиной соответствующей части их мировой линии*. Математически эти постулаты выражаются следующими определениями собственного времени τ :

$$\tau = \int_{\Gamma} |u| ds = \int_{\Gamma} ds. \quad (2.8)$$

В дальнейшем мы, используя приведенные соотношения в рамках h -голоморфной конформной теории относительности, придем к более общей картине поведения часов, в которой скорость хода собственного времени становится функцией точки пространства-времени.

2.2. h -голоморфные функции двойной переменной

Произвольное гладкое отображение $f: R^2 \rightarrow R^2$ можно представлять парой вещественных компонент, либо парой компонент, зависящих от сопряженных двойных переменных $\{h, \bar{h}\}$:

$$(h, \bar{h}) \mapsto (h', \bar{h}') : \quad h' = F_1(h, \bar{h}); \quad \bar{h}' = F_2(h, \bar{h}). \quad (2.9)$$

Для интерпретации R^2 как плоскости двойной переменной \mathcal{H}_2 естественно ограничиться отображениями, сохраняющими гиперболическую комплексную структуру плоскости, т. е. отображениями $\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ вида: $h \mapsto F(h)$. Дифференцируемые¹ функции $R^2 \rightarrow R^2$, удовлетворяющие условию

$$F_{,\bar{h}} = 0, \quad (2.10)$$

¹Понятие производной функции $F(h, \bar{h})$ по аргументам вводится аналогично определению вещественного анализа. Именно, мы определяем дифференци-

будем называть *h-голоморфными* функциями двойной переменной h .
 Функции, удовлетворяющие условию

$$F_{,h} = 0, \quad (2.11)$$

будем называть *h-антиголоморфными* функциями двойной переменной.

По аналогии с голоморфными функциями комплексной переменной голоморфные функции двойной переменной можно определять формальными степенными рядами, сходимость которых часто вытекает из сходимости соответствующих вещественных рядов.

Имеет место следующее утверждение: *всякая h-голоморфная или h-антиголоморфная функция двойной переменной отображает делители нуля в делители нуля* или, выражаясь геометрическим языком, *оставляет инвариантным конус любой точки*. Формально это свойство выражается равенством:

$$F(\text{Con}(h)) = \text{Con}(F(h)),$$

для всякой точки h из области голоморфности функции F (доказательство см. в [1]). При этом голоморфная функция сохраняет компоненты конуса, а антиголоморфная переводит компоненты $\lambda(1 \pm j)$ друг в друга.

С учетом покомпонентного определения операторов дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + j \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - j \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2.12)$$

условие (2.10) в декартовых координатах для h -голоморфной функции $F = U + jV$ принимает вид:

$$F_{,\bar{h}} = (U + jV)_{,\bar{h}} = \frac{1}{2} [(U + jV)_{,t} - j(U + jV)_{,x}] = \frac{1}{2} [U_{,t} - V_{,x} + j(V_{,t} - U_{,x})] = 0,$$

руемость функции F в точке (h, \bar{h}) как следующее свойство ее приращения: $\Delta F = A(h, \bar{h}) \Delta h + B(h, \bar{h}) \Delta \bar{h} + o(\|\Delta h\|_{\mathcal{H}})$, где $\|\Delta h\|_{\mathcal{H}} \equiv [|\Delta t^2 - \Delta x^2|]^{1/2}$ — псевдоевклидова норма приращения переменной. Переходя к различным пределам при $\|\Delta h\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, получаем определения частных производных или "производных по направлениям". Проблема при таком определении возникает только в случае производных вдоль компонент конуса: $\partial_{\text{Con}} = \partial_{\lambda(1 \pm j)}$. Мы не останавливаемся подробно на этом вопросе в настоящих лекциях.

откуда следуют условия гиперболической аналитичности Коши-Римана:

$$U_{,t} = V_{,x}; \quad U_{,x} = V_{,t}. \quad (2.13)$$

Легко проверить, что из условий (2.13) следует гиперболическая гармоничность вещественной и мнимой частей аналитической функции F , которая выражается уравнениями:

$$\square U = \square V = 0, \quad (2.14)$$

где

$$\square \equiv 4\partial_h \partial_{\bar{h}} = \partial_t^2 - \partial_x^2 \quad (2.15)$$

— 2-мерный волновой оператор — даламбертиан ("гиперболический лапласиан").

При отображении

$$\mathcal{H}_2 \xrightarrow{F} \mathcal{H}_2, \quad (2.16)$$

где F — голоморфная функция, метрика η преобразуется (в обратную сторону) по закону:

$$\eta \mapsto \eta' = |F'(h)|^2 \eta, \quad (2.17)$$

где $F'(h) = dF/dh$. Формула (2.17) означает, что функция $F(h)$ в области своей голоморфности и в точках, где $|F'(h)|^2 \neq 0$ осуществляет конформное отображение двойной плоскости на себя, т.е. сохраняет гиперболические углы. Это обстоятельство тесно связано с установленным выше фактом инвариантности конусов \mathcal{C}_θ относительно h -голоморфных отображений. Отметим, что $|F'|^2 = |\nabla U|^2 = |\nabla V|^2 = \Delta_F$, где ∇ — оператор градиента в псевдоевклидовой метрике, а Δ_F — якобиан отображения F , рассматриваемого как отображение $R^2 \rightarrow R^2$. Как это следует из условий (2.13) или соображений конформности, линии $U = \text{const}$ и линии $V = \text{const}$ для всякой голоморфной функции $F(h)$ образуют на плоскости \mathcal{H}_2 ортогональную (в гиперболическом смысле) криволинейную систему координат, поскольку в каждой точке выполняется равенство:

$$\eta(\nabla U, \nabla V) = U_{,t}V_{,t} - U_{,x}V_{,x} = U_{,t}U_{,x} - U_{,x}U_{,t} = 0. \quad (2.18)$$

По аналогии с комплексным случаем это проясняет геометрический смысл отношения *гиперболической сопряженности* пары функций U и V , которые являются вещественной и мнимой частью некоторой h -голоморфной функции $F(h)$: *сопряженные функции имеют взаимно-ортогональные линии уровня и равные нормы градиентов в каждой точке.*

Отметим, что множество конформных преобразований псевдоевклидовой метрики, как и в евклидовом случае, не исчерпывается h -голоморфными функциями. Отметим также, что в отличие от общего конформного преобразования псевдоевклидовой метрики, которое может индуцировать кривизну, h -голоморфные преобразования, рассматриваемые здесь, оставляют пространство-время плоским. Ввиду этого можно сказать, что излагаемая ниже теория представляет собой промежуточное звено между специальной и общей теориями относительности в 2-мерном случае.

3. Теория гиперболического потенциала в пустоте

3.1. Принципы конформной теории относительности

Расширим теперь группу Пуанкаре, действующую на двумерном пространстве-времени \mathcal{M}_2 , до группы произвольных h -голоморфных преобразований, которые действуют на точки-события пространства-времени как на элементы алгебры \mathcal{H}_2 . Ввиду нелинейности преобразования F , глобальная аффинная структура \mathcal{M}_2 в общем случае не сохраняется и необходимо переходить к локальной версии отображения — его дифференциалу. На алгебраическом языке дифференциал отображения F осуществляет отображение касательных пространств по формуле:

$$\xi_h \mapsto \chi_{F(h)} = F' \xi_h. \quad (3.19)$$

где $\xi_h \in T_h \mathcal{M}_2$, $\chi_{F(h)} \in T_{F(h)} \mathcal{M}_2$, $h = t + jx$. Используя экспоненциальное представление для производной F' :

$$F'(h) = \epsilon |F'| (t, x) e^{j\psi(t, x)}, \quad (3.20)$$

приходим к заключению о том, что локально h -голоморфные преобразования осуществляют:

1. преобразования Лоренца, зависящие от точки (поворот на гиперболический угол $\psi(t, x)$);
2. отражения осей времени и пространственной координаты (параметр ϵ);
3. растяжение длин векторов (скалярный множитель $|F'|(t, x)$).

Первые два типа преобразований, по существу, рассматриваются и в стандартной версии СТО. Разница преобразований Лоренца в конформной СТО и обычной СТО заключается в том, что первые действуют локально, т.е. параметр ψ зависит от точки, в то время как в стандартной СТО мы используем глобальные преобразования Лоренца, сохраняющие аффинную структуру пространства-времени².

Таким образом, в локальной версии преобразований пространства-времени единственными новыми элементами являются растяжения псевдоевклидовых длин (интервалов), описываемое модулем производной $|F'|$. В случае стандартных преобразований Лоренца $|F'| = 1$ и конформная степень свободы исчезает.

Перейдем к физической интерпретации h -голоморфных отображений. При этом в качестве эвристического руководящего принципа мы будем придерживаться *принципа аналогии с комплексной плоскостью*. Голоморфная функция на комплексной плоскости может быть как динамическим (электростатика), так и кинематическим (гидродинамика) потенциалом. Эти две точки зрения могут быть в определенном смысле эквивалентными друг другу, аналогично тому как силовой и геометрический способы описания гравитации в некоторых ситуациях эквивалентны друг другу в рамках ОТО.

Будем рассматривать функцию $F = U + jV$ как комплексный потенциал опорного векторного поля 2-скорости или *опорного поля собственного времени*. Само поле 2-скорости u будет определяться формулой:

$$u = \frac{dF}{dh} = \frac{\partial U}{\partial t} + j \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (3.21)$$

²Отметим, что попытка использовать локализованные преобразования Лоренца посредством умножения на элементы вида $e^{j\psi(t,x)}$ выводит за рамки h -голоморфных преобразований.

в которой использованы определение (2.12) оператора комплексного дифференцирования и гиперболические условия Коши-Римана (2.13). Квадрат модуля 2-скорости

$$|u|^2 = (\nabla U)^2 = (\nabla V)^2 = |F'|^2. \quad (3.22)$$

Первый знак равенства в формуле (2.8) остается в силе и определяет теперь нетривиальное "поле скоростей" собственного времени, которое на всякой интегральной кривой Γ этого поля задается соотношением:

$$\frac{d\tau}{ds} = |F'|. \quad (3.23)$$

Теперь в рассматриваемой нами h -голоморфной теории относительности интервалы псевдоевклидовой длины и хроноинтервалы оказываются различными и связь между ними в каждой точке управляется гиперкомплексным потенциалом F .

Составим уравнения интегральных кривых опорного поля собственного времени (линий времени или линий тока времени):

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (3.24)$$

Потенциальность поля собственного времени приводит к тому, что параметр λ оказывается пропорциональным натуральному параметру s на интегральной кривой. Для доказательства этого факта вычислим смешанные производные $\partial^2 U / \partial t \partial x$ из первого и второго уравнения в (3.24) независимо. Имеем для первого уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{d^2 t}{d\lambda^2} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^{-1}.$$

Аналогично для второго уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{dx}{d\lambda} = \frac{d^2 x}{d\lambda^2} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^{-1}.$$

Приравнивая полученные выражения получаем после простых преобразований

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 \right) = 0, \quad (3.25)$$

откуда следует

$$\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = C = \text{const}, \quad (3.26)$$

что и требовалось доказать. В дальнейшем мы везде полагаем $C = 1$.

Интегральные кривые поля ∇V — это пространственные сечения 2-мерного пространства-времени, ортогональные в каждой точке линиям времени. Для вычисления пространственных длин вдоль пространственных сечений произвольной конформной калибровки можно воспользоваться формулой

$$\ell = \int |F'| ds, \quad (3.27)$$

где параметр s — натуральный параметр интегральной кривой поля ∇V , определяемой парой уравнений:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.28)$$

Таким образом, масштабный множитель "управляет" как ходом собственного времени, так и пространственными расстояниями. Это становится совсем очевидным, если обратить внимание на полное равноправие времениподобных и пространственно-подобных направлений и условность их интерпретации как таковых в рамках 2-мерной СТО.

Для произвольных движений пробных частиц промежутки времени и длины вычисляются по формулам:

$$\frac{d\tau}{ds} = \eta(\nabla U, w); \quad \frac{d\ell}{ds} = \eta(\nabla V, w), \quad (3.29)$$

где w — стандартный вектор 2-скорости пробной частицы ($|w| = 1$).

3.2. Конформный сдвиг частоты

Проанализируем с позиций излагаемой конформной теории относительности процедуру сравнения хода пространственно разделенных часов. Пусть Γ_1 и Γ_2 — мировые линии двух часов, которые рассматриваются в 2-мерном пространстве времени в некоторой конформной калибровке, задаваемой h -голоморфным потенциалом

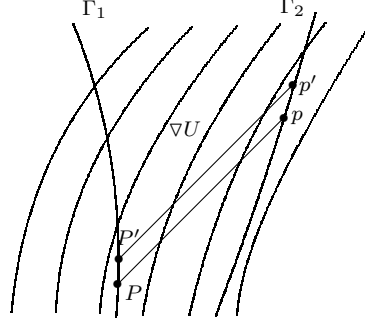


Рис. 3.1: К процедуре сравнения хода часов в h -голоморфной теории относительности

$F = U + jV$ (рис. 3.1). Рассмотрим пару близких точек на интегральной кривой Γ_2 : точку $p = (t(s_2), x(s_2))$ и точку $p' = (t(s_2 + \Delta s_2), x(s_2 + \Delta s_2))$, где s_2 — натуральный параметр на кривой Γ_2 . Переходя к линейризованным выражениям, получаем:

$$t' = t(s_2 + \Delta s_2) = t(s_2) + \dot{t}\Delta s_2 + o(\Delta s_2); \quad (3.30)$$

$$x' = x(s_2 + \Delta s_2) = x + \dot{x}\Delta s_2 + o(\Delta s_2), \quad (3.31)$$

где точка означает дифференцирование по параметру s_2 . С учетом того, что вектор $\dot{t}\partial_t + \dot{x}\partial_x$ 2-скорости часов 2 является единичным в метрике Минковского η , хроноинтервал, приходящийся на рассматриваемый отрезок Δs_2 мировой линии Γ_2 , можно вычислить, спроектировав его на направление ∇U в точке p (\star — скалярное произведение в 2-мерной метрике Минковского η):

$$d\tau_2 = \nabla U \star (\dot{t}\partial_t + \dot{x}\partial_x)\Delta s_2 = (U_{,t}\dot{t} - U_{,x}\dot{x})\Delta s_2. \quad (3.32)$$

Линии конусов прошлого $\text{Con}(p)$ и $\text{Con}(p')$ высекают на мировой линии Γ_1 пару точек $P = (T, X)$ и $P' = (T', X')$ соответственно. Условие принадлежности пары точек $\{p, P\}$ одной компоненте конуса приводит к соотношению

$$T(s_1) - X(s_1) = t(s_2) - x(s_2), \quad (3.33)$$

определяющему связь параметров s_1 (натуральный параметр на мировой линии Γ_1) и s_2 , при которых часы оказываются связаны световым сигналом. Для часов 1 имеем аналогично формуле (3.32):

$$d\tau_1 = \nabla U \star (\dot{T}\partial_t + \dot{X}\partial_x)\Delta s_1 = (U_{,t}\dot{T} - U_{,x}\dot{X})|_{\text{Con}(p)}\Delta s_1. \quad (3.34)$$

Дифференцируя соотношение (3.33), приходим к связи длин отрезков мировых линий часов:

$$ds_1 = \frac{\dot{t} - \dot{x}}{(\dot{T} - \dot{X})|_{\text{Con}(p)}} ds_2. \quad (3.35)$$

Теперь из (3.32) и (3.34) с учетом (3.35) получаем:

$$\delta(P|p) \equiv \frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\Delta_{p'}}{\Delta_p}, \quad (3.36)$$

где

$$\Delta_p \equiv \frac{U_{,t}\dot{t} - U_{,x}\dot{x}}{\dot{t} - \dot{x}}; \quad \Delta_{p'} \equiv \frac{U_{,t}\dot{T} - U_{,x}\dot{X}}{\dot{T} - \dot{X}} \Big|_{\text{Con}(p)}. \quad (3.37)$$

Формулы (3.36)-(3.37) описывают принципиально наблюдаемый эффект конформной деформации собственного времени, измеряемый путем обмена световыми сигналами между двумя пространственно разделенными часами. Величина $\delta(P|p)$ измеряет скорость хода часов в точке P в единицах собственного времени часов в точке p , расположенной на конусе будущего точки P , в конформной калибровке $F = U + jV$.

В качестве примера рассмотрим эффект конформной деформации времени, индуцированной слабой конформной волной вида:

$$F(h) = h + \varepsilon \sin \omega h, \quad \omega \varepsilon \ll 1. \quad (3.38)$$

Полагая $\varepsilon = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2$, $\omega = \omega_1 + j\omega_2$, получаем для $F(h) = U(t, x) + jV(t, x)$ в компонентах:

$$U(t, x) = t + \varepsilon_1 \sin \Phi_1 \cos \Phi_2 + \varepsilon_2 \sin \Phi_2 \cos \Phi_1; \quad (3.39)$$

$$V(t, x) = x + \varepsilon_1 \sin \Phi_2 \cos \Phi_1 + \varepsilon_2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_2, \quad (3.40)$$

где $\Phi_1 = \omega_1 t + \omega_2 x$, $\Phi_2 = \omega_2 t + \omega_1 x$.

Рассмотрим пару покоящихся на расстоянии L друг от друга часов³. Такие часы описываются компонентами 2-скорости: $\dot{t} = \dot{T} = 1$, $\dot{x} = \dot{X} = 0$. Формулы (3.36)-(3.37) приводят к простому выражению эффекта конформной деформации времени (координаты (t, x) — произвольные текущие координаты опорных часов):

$$\delta((t - L, x - L)|(t, x)) = \frac{U_{,t}(t - L, x - L)}{U_{,t}(t, x)}. \quad (3.41)$$

Элементарные вычисления приводят к выражениям:

$$U_{,t}(t, x) = 1 + \varepsilon_1(\omega_1 \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 - \omega_2 \sin \Phi_1 \sin \Phi_2) \quad (3.42)$$

$$+ \varepsilon_2(\omega_2 \cos \Phi_2 \cos \Phi_1 - \omega_1 \sin \Phi_2 \sin \Phi_1);$$

$$U_{,t}(t - L, x - L) = U_{,t}(t, x)|_{\Phi_i \rightarrow \Phi_i - \delta}, \quad (3.43)$$

где $\delta = (\omega_1 + \omega_2)L$. Подставляя (3.42)-(3.43) в формулу (3.41) и используя условие малости конформной деформации, после элементарных тригонометрических преобразований получаем следующее выражение для относительного хода часов:

$$\delta((t - L, x - L)|(t, x)) \approx$$

$$1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\omega_1 + \omega_2) \sin[(\omega_1 + \omega_2)L] \sin[(\omega_1 + \omega_2)(t + x - L)]. \quad (3.44)$$

Формула (3.44) показывает, что в h -голоморфной теории относительности относительная скорость хода часов испытывает пространственно-временную модуляцию, которая в принципиальном отношении доступна измерению посредством эксперимента. В реальном эксперименте удобнее измерять не скорость хода часов, а сдвиг частоты двух точечных электромагнитных излучателей. Формула для относительного сдвига частоты в этом случае:

$$\frac{d\omega_2}{d\omega_1} - 1 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\omega_1 + \omega_2) \sin[(\omega_1 + \omega_2)L] \sin[(\omega_1 + \omega_2)(t + x - L)] \quad (3.45)$$

³Далее мы везде отождествляем L с разностью координат x положений часов, поскольку учет конформной деформации длин с помощью формулы (3.27) приведет к поправкам высшего порядка малости.

получается очевидным образом из формулы (3.44).

Для организации подобного эксперимента необходимо знать, каким распределением источников порождается конформная деформация вида (3.38). Опираясь на принцип аналогии с комплексной плоскостью, сформулируем некоторые общие гипотетические положения (аксиомы конформной теории относительности), позволяющие ответить на этот вопрос.

1. Источником конформной деформации 2-мерного пространства-времени является *гиперболический заряд*, связанный некоторым (пока неизвестным) образом с характеристиками материи (плотностью энергии, давлением, . . .).
2. В вакууме (т.е. в пустом пространстве-времени вне дискретных или распределенных источников) поле конформной деформации описывается некоторой h -голоморфной функцией $F = U + jV$.
3. На границе источников (линии) $V = \text{const}$ (физически это означает, что мировая линия материальной частицы границы области источника образует одну из линий тока времени).

Сформулированные принципы оставляют невыясненным вопрос об определении поля конформной деформации в области внутри источников — в общем случае оно не будет там h -голоморфным. Мы посвятим этому вопросу следующий раздел. Заметим здесь однако, что для большинства экспериментов с пробными излучателями и часами этот вопрос несущественен, поскольку такие эксперименты проводятся вне источников.

Определим приближенный закон движения границ источников в рассмотренном нами примере. С учетом (3.40) условие $V = C = \text{const}$ принимает вид:

$$x + \varepsilon_1 \sin \Phi_2 \cos \Phi_1 + \varepsilon_2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_2 = C. \quad (3.46)$$

— неявного уравнения, определяющего закон движения границы. Для $C \gg \varepsilon$ можно легко найти приближенное решение в явном виде:

$$x \approx C - (\varepsilon_1 \sin \Phi_2 \cos \Phi_1 + \varepsilon_2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_2)|_{x=C}$$

или в явном виде:

$$x \approx C - \varepsilon_1 \sin(\omega_2 t + \omega_1 C) \cos(\omega_1 t + \omega_2 C) + \varepsilon_2 \sin(\omega_1 t + \omega_2 C) \cos(\omega_2 t + \omega_1 C). \quad (3.47)$$

Вид линий из семейства (3.46) при некоторых частных значениях ω_i, ε_i и C представлен на рисунке.

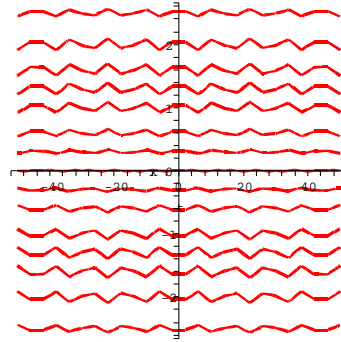


Рис. 3.2. Семейство линий-границ (3.46) потенциальных источников поля конформных деформаций (3.38) для $\varepsilon_2 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\omega_1 = 1$. В области вблизи оси абсцисс (оси времени) условие малости, которое было использовано для вывода приближенного решения (3.47) нарушается.

Сделаем несколько замечаний по поводу рассматриваемой ситуации и полученных результатов.

1. Рассматриваемая нами ситуация слабой волны конформной деформации в значительной степени аналогична полю слабой плоской гравитационной волны. Однако, как уже отмечалось выше, конформная деформация, описываемая посредством h -голоморфных функций, не меняет плоскостности 2-мерного пространства времени, в то время как гравитационная волна в ОТО характеризуется ненулевым тензором конформной кривизны и неустранима ни преобразованиями координат, ни общим конформным преобразованием метрики. Кроме того, волна конформной деформации собственного времени эффективно опи-

сывается скаляром, в то время как гравитационная волна существенно тензорная и поперечная.

2. Тем не менее, эффект конформной деформации возможно следует рассматривать как эффект, включающий стандартные электромагнетизм, гравитацию и возможно поля новой еще неизвестной природы (5-ая сила), описываемый нами в рамках некоторого альтернативного формализма. Наиболее полно этот формализм должен реализовываться в рамках пространств \mathcal{H}_n (n -мерных метрических пространств Бервальда-Моора, тесно связанных с алгеброй поличисел). Этим вопросам мы предполагаем специально посвятить несколько будущих публикаций.
3. Отметим, что наше рассмотрение по существу предполагает формальный биметризм. Одна из метрик — метрика Минковского η , которая не подвергается конформной деформации и является опорной. Другая метрика — деформированная метрика Минковского $|F'|^2\eta$, которую мы не использовали как таковую. Для сравнения развиваемого нами подхода с подходом ОТО удобнее встать на противоположную точку зрения и использовать в рассуждениях именно деформированную метрику $|F'|^2\eta$. Мы еще вернемся к этому вопросу в Заключение.
4. Расчет потенциала F подразумевает введение некоторого динамического принципа, включающего уравнения поля и законы его взаимодействия с материей. Один из простейших вариантов, в котором характеристики материи связываются с неголоморфностью самого поля F , мы обсудим в следующем разделе.

4. Динамическая теория гиперкомплексного потенциала

Целью настоящего раздела является формулировка и исследование динамического принципа, из которого бы вытекали законы (уравнения), управляющие динамикой поля F . Вне источников это поле должно становиться полем конформной деформации, описываемым некоторой h -голоморфной функцией, со всеми свойствами и физической интерпретацией, рассмотренными выше. Из общих соображений

очевидно, что в области, занятой источниками, поле F , вообще говоря, уже не будет являться голоморфной функцией переменной h . Другими словами, область источников поля характеризуется неравенством $F_{,\bar{h}} \neq 0$, выражающим факт неголоморфности функции F , так что в этой области полевая функция F зависит, вообще говоря, как от переменной h , так и от переменной \bar{h} . Будем в дальнейшем называть величину $F_{,\bar{h}}$ *неголоморфностью гиперкомплексного потенциала F* . Если мы постулируем, что линии времени внутри источников как и прежде совпадают с интегральными кривыми векторного поля $F_{,h}$ (которое, отметим, теперь уже в общем случае не является градиентом), то поле F становится универсальной функцией, содержащей в себе всю информацию обо всем пространстве-времени вместе с его материальным наполнением: производные $F_{,h}$ отвечают за локальные кинематику источников и геометрию пространства-времени, а производные $F_{,\bar{h}}$ (неголоморфность) отвечают за внутренние локальные характеристики источников.

4.1. Вариационный принцип и уравнения поля

Перейдем к теоретико-полевым формулировкам. Постулируем действие для гиперболического потенциала в следующем виде:

$$\mathcal{S}[F, \bar{F}] = \alpha \int_{\mathcal{H}_2} \{|F_{,h}|^2 - \mathcal{U}(|F_{,\bar{h}}|^2)\} dh \wedge d\bar{h}, \quad (4.48)$$

где первое слагаемое под интегралом является гиперболическим "кинетическим членом" и отвечает за динамику гиперболического потенциала в пустоте, а второе слагаемое представляет собой гиперболический "потенциальный член" и отвечает за свойства и вклад источников. В соответствии с изложенными выше соображениями, это последнее слагаемое зависит только от гиперболического модуля величины неголоморфности и в области вне источников, где неголоморфность обращается в нуль, оно определяет в действии некоторую "полную дивергенцию", не дающую вклада в уравнения движения. Отметим, что действие в целом вещественно, хотя мы и записали его в двойном представлении. Константа α в нашем рассмотрении необходима лишь для соблюдения правильной размерности и ее конкретное

значение не будет играть в дальнейшем никакой роли⁴.

Из общих соображений можно было бы сразу исключить из рассмотрения случаи $\mathcal{U}(X) = AX + B$. Действительно, добавление к лагранжиану константы изменяет его на полную дивергенцию и не меняет уравнений поля. Слагаемое же вида $A |F_{,\bar{h}}|^2$ с точностью до полной дивергенции равно $A |F_{,h}|^2$ и его добавление по существу сводится к переопределению константы α в (4.48). В дальнейшем, если это не оговорено особо, мы всегда будем подразумевать, что потенциальная функция отлична от линейной и будем игнорировать линейные добавки к ней.

Стандартная процедура варьирования действия (4.48) по полевым переменным \bar{F} , F приводит к уравнениям поля, которые можно привести к виду:

$$\frac{1}{4} \square F = (\mathcal{U}' F_{,\bar{h}})_{,h} \quad (4.49)$$

— неоднородного волнового уравнения с источником в правой части, зависящим лишь от неголоморфности F . Штрих в (4.49) обозначает дифференцирование функции \mathcal{U} по ее аргументу (т. е. по квадрату модуля неголоморфности). Второе уравнение получается из уравнения (4.49) его гиперболическим комплексным сопряжением. Как и следовало ожидать, уравнения поля получились нелинейными, поскольку поле F , как это следует из принципов развиваемой теории, описывает и свои источники за счет эффективного самодействия. В этом отношении развиваемая теория примыкает к вариантам единой теории поля Ми [8].

4.2. Первый интеграл и его следствия

Замечательной особенностью уравнений (4.49) является наличие у них первого интеграла, независимо от конкретного вида потенциальной функции \mathcal{U} . Действительно, записывая волновой оператор в комплексной форме (2.15), уравнение (4.49) можно представить в виде равенства нулю некоторой производной:

$$(F_{,\bar{h}}(1 - \mathcal{U}'))_{,h} = 0, \quad (4.50)$$

⁴Эта константа будет играть роль лишь при исследовании взаимодействия поля F с другими полями, которые не описываются полем F . Эту задачу мы в настоящей статье не рассматриваем.

откуда следует

$$F_{,\bar{h}}(1 - \mathcal{U}') = \varphi(\bar{h}) \quad (4.51)$$

— первый интеграл уравнения (4.49), содержащий произвольную функцию $\varphi(\bar{h})$.

Интеграл (4.51) в общем случае представляет собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Рассмотрим его важное следствие, которое выполняется в общем случае независимо от вида потенциальной функции \mathcal{U} . Домножая обе части уравнения (4.51) на $\bar{F}_{,h}$ и обозначая $|F_{,\bar{h}}|^2 \equiv X \in R$, приходим к соотношению:

$$R \ni X(1 - \mathcal{U}'(X)) = \varphi(\bar{h})\bar{F}_{,h}, \quad (4.52)$$

откуда следует, что

$$\text{Im } \varphi(\bar{h})\bar{F}_{,h} = 0. \quad (4.53)$$

Расписывая это соотношение в компонентах, приходим к уравнению:

$$\varphi_1(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_2(U_{,t} - V_{,x}) = 0, \quad (4.54)$$

связывающему $\varphi = \varphi_1 + j\varphi_2$ и $F = U + jV$ и не содержащему функции \mathcal{U} . Дифференцируя соотношение (4.54) по t и по x , приходим к паре дифференциальных следствий:

$$\varphi_{1,t}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,t} - V_{,t,t}) + \varphi_{2,t}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,t} - V_{,x,t}) = 0; \quad (4.55)$$

$$\varphi_{1,x}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,x} - V_{,t,x}) + \varphi_{2,x}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,x} - V_{,x,x}) = 0. \quad (4.56)$$

Ввиду того, что φ_1 и φ_2 являются компонентами антиголоморфной функции φ , они связаны гиперболическими условиями типа Коши-Римана:

$$\varphi_{1,t} = -\varphi_{2,x}; \quad \varphi_{1,x} = -\varphi_{2,t}. \quad (4.57)$$

Выражая производные $\varphi_{1,t}$ и $\varphi_{2,t}$ в уравнении (4.55) через (4.57), приходим к уравнению:

$$-\varphi_{2,x}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,t} - V_{,t,t}) - \varphi_{1,x}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,t} - V_{,x,t}) = 0. \quad (4.58)$$

Рассматривая теперь уравнения (4.56) и (4.58) как систему линейных уравнений относительно φ_1 и $\varphi_{1,x}$, находим:

$$\varphi_1 = A\varphi_2 + B\varphi_{2,x}, \quad (4.59)$$

где

$$A = -\frac{N_{1,t}N_2 + (N_1^2)_{,x}/2}{N_1N_{2,x} + (N_2^2)_{,t}/2}, \quad B = -\frac{N_1^2 - N_2^2}{N_1N_{2,x} + (N_2^2)_{,t}/2}, \quad (4.60)$$

а

$$N_1 \equiv U_{,t} - V_{,x}; \quad N_2 \equiv N_2 = U_{,x} - V_{,t} \quad (4.61)$$

— величины, обращающиеся в нуль для h -голоморфного потенциала $F(h)$ (т.е. по существу компоненты неголоморфности F). Подставляя теперь решение (4.59) в (4.54), приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно φ_2 , которое можно преобразовать к виду:

$$(\ln \varphi_2)_{,x} = -\frac{A}{B} - \frac{N_1}{N_2 B}, \quad (4.62)$$

где A и B определяются формулами (4.60)-(4.61).

Выражая теперь аналогичным образом производные $\varphi_{1,x}$ и $\varphi_{2,x}$ в уравнении (4.56) через (4.57), приходим к уравнению:

$$-\varphi_{2,t}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,x} - V_{,t,x}) - \varphi_{1,t}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,x} - V_{,x,x}) = 0. \quad (4.63)$$

Снова рассматривая уравнения (4.55) и (4.63) как систему линейных уравнений относительно φ_1 и $\varphi_{1,t}$, находим:

$$\varphi_1 = \tilde{A}\varphi_2 + \tilde{B}\varphi_{2,t}, \quad (4.64)$$

где

$$\tilde{A} = -\frac{N_{1,x}N_2 + (N_1^2)_{,t}/2}{N_1N_{2,t} + (N_2^2)_{,x}/2}; \quad \tilde{B} = \frac{N_1^2 - N_2^2}{N_1N_{2,t} + (N_2^2)_{,x}/2}. \quad (4.65)$$

Подставляя решение (4.64) в (4.54), снова приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно φ_2 , которое можно привести к виду:

$$(\ln \varphi_2)_{,t} = -\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} - \frac{N_1}{N_2\tilde{B}}, \quad (4.66)$$

где \tilde{A} и \tilde{B} определяются формулами (4.65) и (4.61).

Приравнявая выраженные из (4.62) и (4.66) вторые смешанные производные: $(\ln \varphi_2)_{,t,x} = (\ln \varphi_2)_{,x,t}$, приходим к условиям интегрируемости исходного уравнения (4.53), которые уже не содержат функций φ_1, φ_2 :

$$\left(\frac{A}{B} + \frac{N_1}{N_2B}\right)_{,t} = \left(\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} + \frac{N_1}{N_2\tilde{B}}\right)_{,x}, \quad (4.67)$$

или после некоторых преобразований и упрощений с учетом формул (4.60), (4.61), (4.65):

$$\begin{aligned} \left(\frac{N_2^2N_{1,t} - N_1^2N_{2,x} + N_1N_2(N_{1,x} - N_{2,t})}{N_2(N_1^2 - N_2^2)}\right)_{,t} = & \quad (4.68) \\ \left(\frac{N_2^2N_{1,x} - N_1^2N_{2,t} + N_1N_2(N_{1,t} - N_{2,x})}{N_2(N_1^2 - N_2^2)}\right)_{,x}. & \end{aligned}$$

Вводя новую функцию: $\mathcal{Q} \equiv N_1/N_2$ после несложных манипуляций с производными уравнение (4.68) приводится к очень простому виду:

$$\square \text{Arth} \mathcal{Q} = 0, \quad (4.69)$$

общий интеграл которого имеет вид:

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{U_{,t} - V_{,x}}{U_{,x} - V_{,t}} = \tanh(\phi_1(t+x) + \phi_2(t-x)), \quad (4.70)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — произвольные функции своих аргументов. Интеграл (4.70) удовлетворяется тождественно и в пустоте, где обращается в нуль неголоморфность. Таким образом, в рассматриваемой нами теории соотношение (4.70) имеет вид общего универсального соотношения, которое, с одной стороны, является следствием вариационного динамического принципа (4.48), с другой ограничивает вид F -поля универсальным образом, независимо от его материальных источников. С математической точки зрения соотношение (4.70) можно рассматривать как некоторое обобщение гиперболических условий Коши-Римана, определяющее некоторый класс $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$ функций с правилом дифференцирования:

$$\frac{dF}{d\bar{h}} = (U_{,x} - V_{,t})(\tanh(\phi_1 + \phi_2) - j). \quad (4.71)$$

Более детальное обсуждение математических свойств этого класса функций и его физическую интерпретацию мы оставляем для следующих публикаций. Сейчас мы остановимся лишь на одном важном наблюдении математического характера, принципиально важном для излагаемого подхода. Условие $F_{,\bar{h}} = 0$, рассматриваемое на границе области, занятой материей, дает два уравнения на две функции от переменных $(t, x) : N_1 = 0, N_2 = 0$, которые в общем случае независимы. Это означало бы, что в нашей теории материальные распределения ограничиваются точечными источниками, за исключением, быть может, некоторых случайных вырожденных ситуаций. Соотношение (4.70), которое можно понимать как линейную связь компонент неголоморфности, выделяет в нашей теории класс физических гиперкомплексных потенциалов $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$, у каждого представителя которого обнуление одной из компонент неголоморфности влечет за собой обнуление другой компоненты. Иными словами, динамический принцип теории в форме (4.48) автоматически приводит к протяженным материальным распределениям, с границей, задаваемой уравнением вида $f(t, x) = 0$, как это и должно быть в реалистичной 2-мерной теории относительности.

4.3. Тензор энергии-импульса и характеристики источников

Поскольку лагранжиан $\mathcal{L} = |F_{,h}|^2 - \mathcal{U}$ в действии (4.48) не зависит от координат, теорема Нетер гарантирует выполнение слабого закона сохранения:

$$\mathcal{T}_{\beta,\alpha}^\alpha = 0, \quad (4.72)$$

где:

$$\mathcal{T}_{\beta,\alpha}^\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{,\alpha}^a} F_{,\beta}^a - \delta_\beta^\alpha \mathcal{L} \quad (4.73)$$

— канонический тензор энергии-импульса поля F . Здесь $\alpha, \beta = h, \bar{h}$, $\{F^a\} = F, \bar{F}$. Непосредственное вычисление по формуле (4.73) приводит к следующему виду компонент тензора \mathcal{T} в комплексном базисе:

$$\mathcal{T}_h^h = \mathcal{T}_{\bar{h}}^{\bar{h}} = \mathcal{U}(X) - \mathcal{U}'(X)X \equiv \mu; \quad \mathcal{T}_h^{\bar{h}} = \overline{\mathcal{T}_{\bar{h}}^h} = \bar{F}_{,\bar{h}} F_{,h} (1 - \mathcal{U}') \equiv \sigma. \quad (4.74)$$

Для пересчета этих компонент в более привычном вещественном базисе заметим, что матрицы Якоби J и J^{-1} , определяющиеся видом преобразований координат:

$$t = \frac{h + \bar{h}}{2}; \quad x = \frac{h - \bar{h}}{2j}; \quad h = t + jx; \quad \bar{h} = t - jx, \quad (4.75)$$

имеют вид:

$$J = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ j/2 & -j/2 \end{pmatrix}; \quad J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

С помощью известного закона преобразования тензоров посредством матриц Якоби легко находим компоненты тензора энергии-импульса в декартовых координатах (t, x) :

$$\mathcal{T}_0^0 = \mu + \operatorname{Re} \sigma; \quad \mathcal{T}_1^1 = \mu - \operatorname{Re} \sigma; \quad \mathcal{T}_0^1 = -\mathcal{T}_1^0 = \operatorname{Im} \sigma \quad (4.77)$$

Из представления (4.77) очевидно, что дважды ковариантный тензор \mathcal{T} полностью симметричен и имеет вид:

$$(\mathcal{T}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \mu + \operatorname{Re} \sigma & -\operatorname{Im} \sigma \\ -\operatorname{Im} \sigma & \operatorname{Re} \sigma - \mu \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Для выяснения вопроса о связи потенциала F с плотностью энергии и давлением составим задачу на собственные значения относительно метрики Минковского η :

$$\mathcal{T}(\sigma, u) = \lambda \eta(\sigma, u). \quad (4.79)$$

Секулярное уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \mu + \operatorname{Re} \sigma - \lambda & -\operatorname{Im} \sigma \\ -\operatorname{Im} \sigma & \operatorname{Re} \sigma - \mu + \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.80)$$

или

$$(\mu - \lambda)^2 - (\operatorname{Re} \sigma)^2 + (\operatorname{Im} \sigma)^2 = 0. \quad (4.81)$$

Его корни:

$$\lambda_1 = \varepsilon = \mu + \sqrt{\sigma \bar{\sigma}}; \quad \lambda_2 = p = \mu - \sqrt{\sigma \bar{\sigma}}. \quad (4.82)$$

Приведем также выражения для ε и p в явном виде:

$$\varepsilon = \mathcal{U} - \mathcal{U}' X + (1 - \mathcal{U}') \sqrt{XY}; \quad p = \mathcal{U} - \mathcal{U}' X - (1 - \mathcal{U}') \sqrt{XY}, \quad (4.83)$$

где $Y \equiv |F_{,h}|^2$.

Из формул (4.83) следует, что величины ε и p в общем случае не связаны никаким уравнением состояния вида $p = f(\varepsilon)$, поскольку функциональный определитель

$$\frac{D(\varepsilon, p)}{D(X, Y)} \equiv \begin{vmatrix} \varepsilon_{,X} & \varepsilon_{,Y} \\ p_{,X} & p_{,Y} \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{U}''(1 - \mathcal{U}')X^2 + (\mathcal{U} - \mathcal{U}'X)(1 - \mathcal{U}' - 2\mathcal{U}''X)}{\sqrt{XY}} \quad (4.84)$$

в общем случае отличен от нуля.

4.4. Пример: статическое пространство-время, деформированное упругим стержнем

Рассмотрим задачу о нахождении гиперболического потенциала внутри и вне 1-мерного упругого однородного покоящегося стержня (см. рис. 4.1).

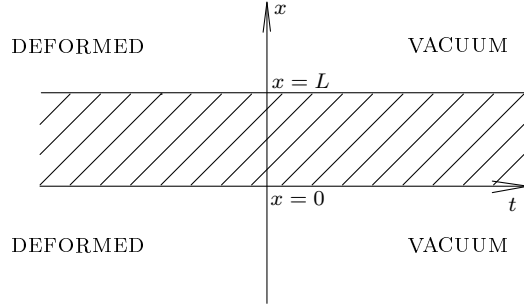


Рис. 4.1: Деформированное пространство-время с самодействующим стержнем

Наша цель — показать, что развиваемая теория может описывать физически правдоподобные ситуации, имеющие в принципиальном отношении адекватный физический смысл. При этом задачи точного количественного описания рассматриваемой ситуации, результаты которого можно было бы сравнивать с прецизионными экспериментами, мы не ставим.

Поскольку задача статическая, будем искать потенциал F внутри стержня в виде: $F = U(x) + jV(x)$. Модуль неголоморфности имеет вид

$$|F_{,\bar{h}}|^2 = X = \frac{1}{4}(V_{,x}^2 - U_{,x}^2) = \frac{1}{4}(\tanh^2(\phi_1 + \phi_2) - 1)U_x^2 = -\frac{U_{,x}^2}{4 \cosh^2(\phi_1 + \phi_2)}, \quad (4.85)$$

который получается с учетом общего уравнения (4.70). Поскольку U и V у нас не зависят от t , не должен зависеть от t и аргумент гиперболического тангенса $\phi_1(t+x) + \phi_2(t-x)$. Нетрудно показать, что это возможно только в случае линейных функций ϕ_1 и ϕ_2 , так что в результате будем иметь

$$|F_{,\bar{h}}|^2 = X = -\frac{U_{,x}^2}{4 \cosh^2(Ax + B)}. \quad (4.86)$$

Рассмотрим функцию U вида:

$$U = \frac{2P}{3}x^3 - PLx^2,$$

где P — некоторая константа, подлежащая определению. Подставляя $U_{,x} = 2Px(x - L)$ в соотношение:

$$V_{,x} = -\tanh(Ax + B)U_{,x} = -2Px(x - L)\tanh(Ax + B), \quad (4.87)$$

мы видим, что решение такого вида удовлетворяет основной гипотезе теории: на границе стержня ($x = 0$ и $x = L$) обе компоненты неголоморфности (и как следствие квадрат ее модуля X) обращаются в нуль, а внутри стержня они отличны от нуля. Из соображений симметрии половин стержня следует также, что аргумент $Ax + B$ должен иметь вид $A(x - L/2)$, чтобы соответствующие функции \cosh^2 и \tanh^2 были четными относительно середины стержня. При этом очевидно, константа A имеет размерность длины и ее переопределение сводится к переопределению константы P . В дальнейшем мы будем полагать $A = L^{-1}$. Таким образом, окончательно имеем:

$$U = \frac{2P}{3}x^3 - PLx^2; \quad X = -\frac{P^2x^2(x - L)^2}{\cosh^2[x/L - 1/2]}; \quad (4.88)$$

$$V = -2P \int_0^x \xi(\xi - L)\tanh[\xi/L - 1/2] d\xi. \quad (4.89)$$

Для того, чтобы записать выражения для плотности энергии и давления внутри стержня, необходимо задать потенциальную функцию. Зададим ее в следующем виде:

$$\mathcal{U}(X) = X + KX^{(w-1)/2w}, \quad (4.90)$$

где w и K — некоторые постоянные, характеризующие вещество стержня. По формулам (4.83) с учетом равенства $X = Y$, справедливого для статики, нетрудно проверить, что такой потенциал определяет уравнение состояния вещества стержня в виде:

$$p = w\varepsilon, \quad (4.91)$$

а выражения для давления и плотности энергии внутри стержня можно привести к виду:

$$p = wB \left(\frac{x^2(x - L)^2}{\cosh^2[x/L - 1/2]} \right)^{(w-1)/2w}, \quad (4.92)$$

$$\varepsilon = B \left(\frac{x^2(x-L)^2}{\cosh^2[x/L - 1/2]} \right)^{(w-1)/2w}, \quad (4.93)$$

где константа B определяется из условия нормировки ε на полную массу стержня. Профиль плотности энергии при некоторых значениях констант представлен на рис. 4.2.

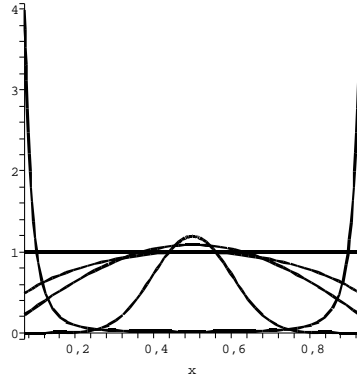


Рис. 4.2. Эпюра плотности энергии в некоторых условных единицах. Длина стержня $L = 1$. Значения констант (w, B) : $(2, 2)$, $(1, 1)$, $(0.2, 0.5 \cdot 10^{-4})$, $(-0.1, 5 \cdot 10^6)$, $(-10, 5)$. Значение константы B выбиралось из соображений удобства масштаба графика.

Следующий шаг решения заключается в сшивке полученного внутреннего решения для стержня с внешним, которое описывается некоторыми h -голоморфными функциями $F_I(h) = U_I + jV_I$ (при $x < 0$) и $F_{II}(h) = U_{II} + jV_{II}$ (при $x > 0$). Компоненты неголоморфности на границе стержня оказываются сшитыми автоматически, поскольку неголоморфность функции F для внутреннего решения обращается на границе в нуль по построению, а функций F_I и F_{II} — в силу их глобальной голоморфности. Эти условия являются модификацией стандартных условий сшивки производных (в нашем случае непрерывны не сами производные, а неголоморфности, т.е. специальные комбинации производных). Далее потребуем чтобы h -потенциал был непрерывным на границе:

$$F_I(t, 0) = F(0); \quad F_{II}(t, L) = F(L), \quad (4.94)$$

где компоненты функции F задаются формулами (4.88). Напишем U_I в виде общего решения волнового уравнения:

$$U_I = \Psi_+ + \Psi_-, \quad (4.95)$$

где первое слагаемое зависит только от комбинации $t + x$, а второе — только от комбинации $(t - x)$. Условие непрерывности на границе $x = 0$ с учетом (4.88) приводит к уравнению:

$$\Psi_+(t) + \Psi_-(t) = 0, \quad (4.96)$$

откуда

$$\Psi_-(\xi) = -\Psi_+(\xi) \equiv \Psi(\xi). \quad (4.97)$$

Из условий Коши-Римана находим выражение для гиперболически сопряженной функции V_I :

$$V_I = \Psi(t + x) + \Psi(t - x). \quad (4.98)$$

Условие непрерывности V_I на границе $x = 0$ с учетом (4.88) приводит к уравнению:

$$\Psi(t) = 0, \quad (4.99)$$

откуда заключаем, что при $x < 0$ $F_I = 0$. Аналогичным образом находим, что при $x > L$ h -потенциал описывается постоянной функцией:

$$F_{II} = U(L) + jV(L), \quad (4.100)$$

где

$$U(L) = -\frac{PL^3}{3}; \quad V(L) = -2P \int_0^L \xi(\xi - L) \tanh[A(\xi - L/2)] d\xi.$$

Нетрудно видеть без вычислений, что последний интеграл равен нулю в силу нечетности подинтегрального выражения относительно точки $x = L/2$, делящей область интегрирования на две половины.

Вид потенциала внутри стержня представлен на рис. 4.3.

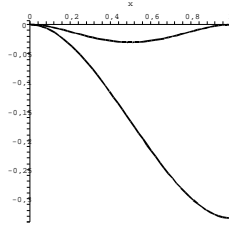


Рис. 4.3. Распределение компонент h -потенциала внутри стержня при $L = 1$ (нижняя кривая — $U(x)$, верхняя — $V(x)$). В силу нечетности подынтегрального выражения в (4.88) относительно точки $L/2$, $V(L) = V(0) = 0$. Снаружи стержня постоянные потенциалы гладко сшиваются с их внутренними значениями слева и справа.

5. Алгебра и геометрия P_3

Для удобства мы предварим изложение набросков теории поля в \mathcal{H}_3 сводкой сведений по алгебре и геометрии поличисел P_3 . Большая часть из этих свойств тривиальным образом распространяется на общие поличисла P_n .

5.1. Алгебра и операции

Ассоциативно-коммутативная алгебра P_3 над полем R (алгебра 3-чисел) обобщает хорошо известную алгебру двойных чисел на плоскости. Ее общий элемент имеет вид

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3, \quad (5.101)$$

где $\{e_i\}$ — специальный набор образующих алгебры, удовлетворяющих соотношениям:

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad (\text{нет суммирования!}). \quad (5.102)$$

Из соотношений (5.102) следуют простые правила умножения и деления поличисел:

$$AB = A_1 B_1 e_1 + A_2 B_2 e_2 + A_3 B_3 e_3; \quad \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} e_1 + \frac{A_2}{B_2} e_2 + \frac{A_3}{B_3} e_3,$$

при этом деление определено только на т. н. невырожденные элементы, у которых все $B_i \neq 0$. Роль единицы алгебры P_3 играет элемент $I = e_1 + e_2 + e_3$.

5.2. Комплексные сопряжения и (псевдо)норма

Определим в P_3 две операции комплексного сопряжения:

$$A^\dagger = (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3)^\dagger \equiv A_3 e_1 + A_1 e_2 + A_2 e_3,$$

$$A^\ddagger = (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3)^\ddagger \equiv A_2 e_1 + A_3 e_2 + A_1 e_3$$

и рассмотрим $\mathbb{3}$ -число $AA^\dagger A^\ddagger$. Простое вычисление показывает, что оно вещественно и равно $A_1 A_2 A_3 I$. Таким образом по аналогии с модулем комплексного числа в P_3 можно ввести (псевдо)норму по формуле:

$$\|A\| \equiv (AA^\dagger A^\ddagger)^{1/3} = (A_1 A_2 A_3)^{1/3}. \quad (5.103)$$

Для невырожденных $\mathbb{3}$ -чисел эта норма имеет многие свойства обычной нормы, в частности, для таких $\mathbb{3}$ -чисел имеет место равенство:

$$\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|. \quad (5.104)$$

5.3. Делители нуля и группа внутренних автоморфизмов

В отличие от поля комплексных чисел и тела кватернионов, алгебра P_3 имеет делители нуля, т. е. существуют не равные нулю элементы $N \in P_3$, удовлетворяющие условию: $\|NA\| = 0$ для всякого $A \in P_3$. Такие элементы называются *вырожденными* и характеризуются тем, что в их представлении (5.101) имеются нулевые коэффициенты. Отметим, что множество вырожденных элементов замкнуто относительно умножения в P_3 . Мы будем обозначать это подмножество P_3° .

С операцией умножения на невырожденные элементы в P_3 связана группа внутренних автоморфизмов $\text{Aut}(P_3)$, которая изоморфна подгруппе (по умножению) невырожденных элементов:

$$\text{Aut}(P_3) \sim P_3 \setminus P_3^\circ, \quad \text{Aut}(P_3) \ni \sigma : A \rightarrow \sigma(A) \equiv \sigma A. \quad (5.105)$$

В этой группе выделяется подгруппа $D_2 \subset P_3$ группы изометрий $\text{Iso}(P_3)$, элементы которой сохраняют норму. Ввиду определения (5.105) и свойства (5.104), элементы этой подгруппы выделяются условием: $\|\sigma\| = 1$ или в компонентах: $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$. Группа D_2 — 2-параметрическая абелева, а группа $\text{Iso}(P_3)$ — 5-параметрическая неабелева. Кроме подгруппы D_2 она включает в себя подгруппу трансляций, изоморфную R^3 .

5.4. Ряды и экспоненциальное представление

В пространстве P_3 (и любом P_n) можно определять степени элементов любого порядка и аналитические функции поличисловой переменной. Например, функцию e^A можно определить стандартным рядом для экспоненты:

$$e^A \equiv I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = e^{A_1}e_1 + e^{A_2}e_2 + e^{A_3}e_3. \quad (5.106)$$

Определим теперь экспоненциальное представление поличисла по формуле:

$$A = \|A\|e^B, \quad (5.107)$$

где B — некоторое 3-число, инвариантное относительно действия группы D_2 , сохраняющей норму $\|A\|$. Компоненты этого числа в базе $\{e_i\}$ называются *экспоненциальными углами*. Независимых экспоненциальных углов будет два, поскольку, как мы увидим ниже, пространство чисел B для числа A с фиксированной нормой $\|A\|$ будет 2-мерным. Для выяснения явного вида экспоненциальных углов, выполним следующую цепочку тождественных преобразований в предположении, что все $A_i > 0$:

$$\begin{aligned} A &= A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 = (A_1A_2A_3)^{1/3} \times \\ &\left(\frac{A_1^{2/3}}{(A_2A_3)^{1/3}}e_1 + \frac{A_2^{2/3}}{(A_1A_3)^{1/3}}e_2 + \frac{A_3^{2/3}}{(A_1A_2)^{1/3}}e_3 \right) = \\ \|A\| &\left(e^{\ln(A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3})}e_1 + e^{\ln(A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3})}e_2 + e^{\ln(A_3^{2/3}/(A_1A_2)^{1/3})}e_3 \right) = \\ \|A\| &(e^{\chi_1}e_1 + e^{\chi_2}e_2 + e^{\chi_3}e_3) = \|A\|e^{\chi_1e_1 + \chi_2e_2 + \chi_3e_3}, \end{aligned} \quad (5.108)$$

где величины

$$\chi_1 \equiv \ln \left[\frac{A_1^{2/3}}{(A_2 A_3)^{1/3}} \right]; \quad \chi_2 \equiv \ln \left[\frac{A_2^{2/3}}{(A_1 A_3)^{1/3}} \right]; \quad \chi_3 \equiv \ln \left[\frac{A_3^{2/3}}{(A_1 A_2)^{1/3}} \right] \quad (5.109)$$

и есть искомые экспоненциальные углы. Ввиду соотношения:

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 0, \quad (5.110)$$

которое в силу формул (5.109) выполняются тождественно, независимых углов будет только два и представление (5.108) можно переписать в следующих эквивалентных формах:

$$A = \|A\| e^{-\chi_2 E_3 + \chi_3 E_2} = \|A\| e^{\chi_1 E_3 - \chi_3 E_1} = \|A\| e^{-\chi_1 E_2 + \chi_2 E_1},$$

где $E_1 = e_2 - e_3$, $E_2 = e_3 - e_1$, $E_3 = e_1 - e_2$ — комбинации базисных векторов, являющиеся генераторами группы D_2 .

Операции комплексного сопряжения действуют на экспоненциальные углы следующим образом:

$$\dagger: \quad \chi_1 \rightarrow \chi_3; \quad \chi_2 \rightarrow \chi_1; \quad \chi_3 \rightarrow \chi_2; \quad \ddagger: \quad \chi_1 \rightarrow \chi_2; \quad \chi_2 \rightarrow \chi_3; \quad \chi_3 \rightarrow \chi_1$$

и обеспечивают справедливость формулы (5.103) в экспоненциальном представлении.

5.5. Обобщения экспоненциальных углов

В предыдущем подразделе формулы (5.109) подразумевают, что все $A_i > 0$. Другими словами, формула (5.107) справедлива только для "положительного октанта". Нетрудно определить экспоненциальное представление и в других октантах, немного обобщив (5.107). Именно, определим экспоненциальное представление для поличисла из внутренней произвольного октанта по формуле

$$A = I_{(j)} \|A'\| e^{B'}, \quad (5.111)$$

где $I_{(j)}$ ($j = 1, \dots, 8$) — единичный вектор в направлении пространственной биссектриссы (в евклидовом смысле) соответствующего координатного октанта, число $A' = A/I_{(j)}$ лежит в положительном октанте, а B' получается из B по формулам предыдущего подраздела с заменой $A \rightarrow A/I_{(j)}$. Такое определение снимает искусственное

ограничение на область определения экспоненциальных углов и более адекватно передает их смысл как величин, отсчитываемых от соответствующих направлений $I_{(j)}$. Отметим, что в наших обозначениях мы принимаем $I_1 \equiv I$. В дальнейшем, если не оговорено особо, все рассуждения будут проводиться в положительном октанте.

Обобщение формул экспоненциального представления на поличисла P_n вполне элементарно. Для него имеет место формула (5.111), в которой индекс j может пробегать уже 2^n значений по числу разделенных координатными плоскостями областей (многомерных октантов). При этом в положительном октанте

$$\|A\| = \left[\prod_{i=1}^n A_i \right]^{1/n}; \quad \chi_k = \ln \left[\frac{A_k}{\|A\|} \right]$$

и имеют место аналогичные формулы для соответствующих штрихованных величин для любого из 2^n многомерных октантов.

5.6. Скалярное 3-произведение (полипроизведение)

С помощью операций \dagger и \ddagger можно определить вещественное число (A, B, C) , называемое *скалярным 3-произведением элементов A, B, C* , которое строится на любых трех векторах в P_3 по правилу:

$${}^{(3)}G(A, B, C) \equiv (A, B, C) \equiv \sum_{X, Y, Z = S(ABC)} XY^\dagger Z^\ddagger = \text{perm} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}, \quad (5.112)$$

где $S(ABC)$ — множество перестановок элементов A, B, C , а $\text{perm}(M)$ — перманент матрицы M , который повторяет структуру ее детерминанта, но все 6 слагаемых в нем берутся со знаком "плюс".

Для поличисел P_n имеет место аналогичное определение n -произведения:

$${}^{(n)}G(X_1, \dots, X_n) \equiv \text{perm}(X_1, \dots, X_n),$$

где $\{X_i\}$ — набор из n штук n -чисел.

5.7. Пространства Бервальда-Моора

Если теперь абстрагироваться от алгебры и с самого начала рассматривать векторное пространство с 3-скалярным произведением, которое в специальном базисе имеет вид (5.112), мы приходим к *финслеровому 3-мерному пространству Бервальда-Моора* (БМ), которое будем обозначать \mathcal{H}_3 . В отличие от P_3 , в нем не предполагается существования какой-либо мультипликативной алгебры. Можно сказать, что отношение между P_3 и \mathcal{H}_3 аналогично отношению между комплексной плоскостью C и евклидовой плоскостью R^2 .

5.8. Конструкция соприкосновения

Векторы \mathcal{H}_3 , имеющие нулевую норму, называются в геометрии БМ *изотропными*. Как видно из определения (5.103), всякий изотропный вектор лежит в какой-либо из трех координатных плоскостей изотропной системы координат. В частности, векторы $e_1 = \{1, 0, 0\}$, $e_2 = \{0, 1, 0\}$, $e_3 = \{0, 0, 1\}$ изотропного базиса этой системы являются изотропными. Таким образом, все координатное пространство \mathcal{H}_3 разбивается координатными плоскостями на 8 октантов, внутри которых нормы векторов отличны от нуля и имеют определенные знаки (рис. 5.1). На координатных плоскостях метрика (5.112) становится

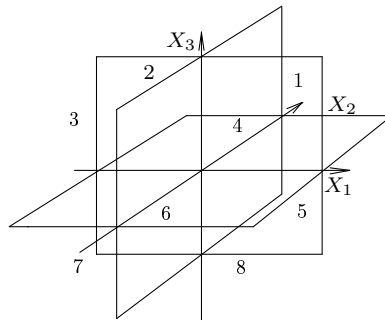


Рис. 5.1: Изотропные координатные плоскости и октанты в \mathcal{H}_3

геометрически вырожденной, поскольку все векторы на них имеют нулевую норму. Для правильного описания геометрических свойств

координатных плоскостей (это — 2-мерные псевдоевклидовы пространства) можно использовать конструкцию соприкосновения [14]. Ее суть заключается в переходе от финслеровой метрики ${}^{(3)}G$ вида (5.112) к соприкасающейся с ней вдоль вектора e_j квадратичной метрике: ${}^{(2)}G_{(j)} \equiv {}^{(3)}G(e_j, \cdot, \cdot)$, действующей в гиперплоскости направлений $x^j = \text{const}$. Например, для случая $j = 3$ будем иметь:

$${}^{(2)}G_{(3)} \equiv {}^{(3)}G(e_3, \cdot, \cdot) = dX_1 \otimes dX_2 + dX_2 \otimes dX_1$$

— метрику Бервальда-Моора на плоскостях $X_3 = \text{const}$, которая является 2-мерной метрикой Минковского, записанная в изотропных координатах.

5.9. Индикатрисса

Метрические свойства пространства \mathcal{H}_3 наглядно иллюстрируются видом единичной сферы $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$ (индикатриссы \mathcal{H}_3), которая определяется уравнением:

$$|\|X\|| = |(X_1 X_2 X_3)^{1/3}| = 1, \quad (5.113)$$

где $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ — радиус-вектор в \mathcal{H}_3 . Поверхность $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$ — 8-связная и некомпактная. Ее компоненты связности расположены симметрично во всех 8 октантах и обладают дискретной симметрией относительно любых перестановок координат. Сечения этой поверхности плоскостями $X_i = \text{const}$ — это семейство гипербол (понимаемых в евклидовом смысле). Наглядно одна из компонент индикатриссы в евклидовом представлении изображена на рис. 5.2.

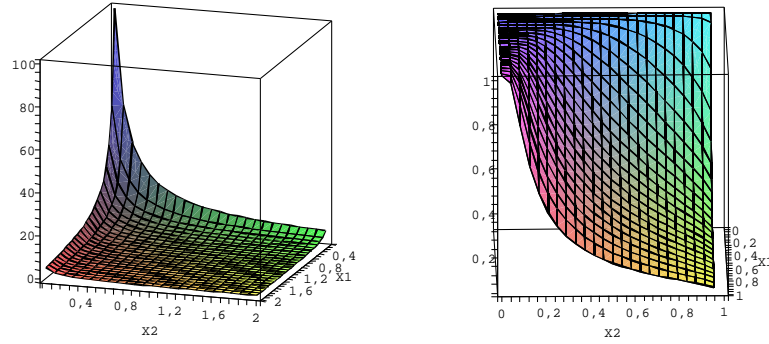


Рис. 5.2. Компонента индикатриссы $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$, лежащая в первом октанте. На правом рисунке эта компонента компактифицирована в единичный куб с помощью отображения $X_i \mapsto \tanh(X_i \ln 3/2)$. Коэффициент в аргументе гиперболического тангенса подобран так, чтобы точка $\{1, 1, 1\}$ переходила в точку $\{1/2, 1/2, 1/2\}$ единичного куба.

5.10. Геометрическая интерпретация группы $\text{Iso}(\mathcal{H}_3)$

Как, собственно, уже отмечалось выше группа изометрий $\text{Iso}(\mathcal{H}_3)$ метрики (5.112) состоит из 3-параметрической абелевой подгруппы трансляций с элементами $T_A : X \rightarrow X + A$ и 2-параметрической абелевой подгруппой унимодулярно-согласованных дилатаций D_2 с элементами $D_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} : \{X_1, X_2, X_3\} \rightarrow \{\sigma_1 X_1, \sigma_2 X_2, \sigma_3 X_3\}$ и соотношением

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 1. \tag{5.114}$$

С алгебраической точки зрения на \mathcal{H}_3 группа D_2 есть ни что иное, как описанная выше подгруппа из $\text{Iso}(P_3)$ умножений на элементы с единичной нормой. Отметим еще раз, что группа $\text{Iso}(\mathcal{H}_3)$ — неабелева и имеет структуру полупрямого произведения: $\text{Iso}(\mathcal{H}_3) = \mathcal{R}^3 \rtimes D_2$. Группа D_2 играет роль вращений в пространстве \mathcal{H}_3 и обобщает гиперболические вращения псевдоевклидовой плоскости. В частности, действие группы D_2 на индикатриссе транзитивно: $\mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2 \xrightarrow{D_2} \mathcal{S}_{\text{ВМ}}^2$. Мы

увидим, что отличия групп евклидовых и гиперболических вращений (размерность и коммутационные соотношения) приводят к важным и интересным геометрическим следствиям.

Для высших пространств БМ \mathcal{H}_n аналогично имеем $\text{Iso}(\mathcal{H}_n) = R^n \rtimes D_{n-1}$.

6. h -голоморфные поля в пространстве \mathcal{H}_3 .

Перейдем теперь к некоторым предварительным заготовкам на будущее, необходимым для обобщения излагаемого подхода на пространства Бервальда-Моора большего числа измерений. Как и в рассмотренном выше двумерном случае, общее гладкое отображение $\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ можно представить в виде $F = F(h, h^\dagger, h^\ddagger)$. Назовем отображение F :

1. h -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad (6.115)$$

2. h^\dagger -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad (6.116)$$

3. h^\ddagger -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = 0; \quad (6.117)$$

4. hh^\dagger -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad (6.118)$$

5. hh^\ddagger -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = 0; \quad (6.119)$$

6. $h^\dagger h^\ddagger$ -голоморфным, если

$$\frac{\partial F}{\partial h} = 0. \quad (6.120)$$

Как это видно из данных определений, с увеличением размерности коммутативно-ассоциативной алгебры число типов голоморфности возрастает. Очевидно, что первое определение является аналогом обычной комплексной голоморфности или h -голоморфности на двойной плоскости. Второе и третье определения являются аналогами комплексной или двойной антиголоморфности, а последние три определения не имеют аналогов в двух измерениях и представляют собой "ослабленные" варианты голоморфности. В настоящей статье мы сконцентрируемся на h -голоморфности, ее свойствах и следствиях.

Будем стартовать с изотропного базиса в \mathcal{H}_3 , в котором h -голоморфная функция имеет следующее представление:

$$F(h) = F(\xi_1)e_1 + F(\xi_2)e_2 + F(\xi_3)e_3. \quad (6.121)$$

Операторы дифференцирования по переменным h, h^\dagger, h^\ddagger имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial h} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3}; \quad (6.122)$$

$$\frac{\partial}{\partial h^\dagger} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2}; \quad (6.123)$$

$$\frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1}. \quad (6.124)$$

В силу (6.122-6.124) непосредственной проверкой в компонентах легко убедиться в справедливости равенств для функции F в виде (6.121):

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} e_1 + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} e_2 + \frac{\partial F_3}{\partial \xi_3} e_3, \quad (6.125)$$

где здесь и далее $F_i \equiv F(\xi_i)$ — одна и та же функция от разных изотропных переменных. Цель дальнейшего рассмотрения — записать

условия голоморфности в каком-нибудь неизотропном базисе, т.е. вывести многомерный аналог стандартных условий Коши-Римана. Среди всех возможных неизотропных базисов алгебры \mathcal{H}_3 своей симметрией выделяется базис, состоящий из трех гиперболических мнимых единиц $\{j_1, j_2, j_3\}$, связанный с изотропным базисом соотношениями:

$$j_1 = e_1 - e_2 - e_3; \quad j_2 = -e_1 + e_2 - e_3; \quad j_3 = -e_1 - e_2 + e_3, \quad (6.126)$$

из которых следуют правила умножения этих единиц:

$$j_i^2 = -(j_1 + j_2 + j_3); \quad j_i \cdot j_k = j_l \quad (j \neq k \neq l). \quad (6.127)$$

Записывая число h в виде разложения $h = x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3$, выражая j -базис через e -базис по формулам (6.126), собирая коэффициенты при e_i и приравнявая их ξ_i , получаем следующую связь координат 3-числа в e -базисе и j -базисе:

$$\xi_1 = x_1 - x_2 - x_3; \quad \xi_2 = -x_1 + x_2 - x_3; \quad \xi_3 = -x_1 - x_2 + x_3. \quad (6.128)$$

В дальнейшем нам потребуются также формулы обратных преобразований для базисов и координат:

$$e_1 = -\frac{j_2 + j_3}{2}; \quad e_2 = -\frac{j_1 + j_3}{2}; \quad e_3 = -\frac{j_1 + j_2}{2}; \quad (6.129)$$

$$x_1 = -\frac{\xi_2 + \xi_3}{2}; \quad x_2 = -\frac{\xi_1 + \xi_3}{2}; \quad x_3 = -\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}. \quad (6.130)$$

Легко проверить, что действие комплексных сопряжений сводится к правилам:

$$j_1^\dagger = j_2; \quad j_2^\dagger = j_3; \quad j_3^\dagger = j_1; \quad j_1^\ddagger = j_3; \quad j_2^\ddagger = j_1; \quad j_3^\ddagger = j_2. \quad (6.131)$$

В качестве следующего шага запишем операторы дифференцирования по 3-числу в j -базисе. Для этой цели в формулах (6.122-6.124) сделаем подстановки e_i из (6.129), и операторов дифференцирования $\partial/\partial\xi_i$ по формулам:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_l} \right), \quad (6.132)$$

где i, k, l — принимают все не равные друг другу значения. После таких подстановок и элементарных преобразований получаем искомые формулы:

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{4}[j_1(\bar{\partial} + \partial_1) + j_2(\bar{\partial} + \partial_2) + j_3(\bar{\partial} + \partial_3)], \quad (6.133)$$

где $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, $\bar{\partial} \equiv \sum_i \partial_i$ и еще пара формул, получающаяся из (6.133) действием операций \dagger и \ddagger и использованием формул (6.131):

$$\frac{\partial}{\partial h^\dagger} = \frac{1}{4}[j_2(\bar{\partial} + \partial_1) + j_3(\bar{\partial} + \partial_2) + j_1(\bar{\partial} + \partial_3)], \quad (6.134)$$

$$\frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = \frac{1}{4}[j_3(\bar{\partial} + \partial_1) + j_1(\bar{\partial} + \partial_2) + j_2(\bar{\partial} + \partial_3)]. \quad (6.135)$$

Рассмотрим теперь некоторую h -голоморфную функцию, которая в j -базисе имеет представление

$$F(h) = U_1 j_1 + U_2 j_2 + U_3 j_3. \quad (6.136)$$

Действуя на нее операторами (6.134) и (6.135), расписывая результат в компонентах с учетом правил (6.127), приходим к следующей паре систем уравнений в частных производных, которым должна удовлетворять всякая h -голоморфная функция:

$$\begin{pmatrix} -(\bar{\partial} + \partial_3) & \partial_{2-1} & \partial_{1-2} \\ \partial_{2-3} & -(\bar{\partial} + \partial_1) & \partial_{3-2} \\ \partial_{1-3} & \partial_{3-1} & -(\bar{\partial} + \partial_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0; \quad (6.137)$$

$$\begin{pmatrix} -(\bar{\partial} + \partial_2) & \partial_{1-3} & \partial_{3-1} \\ \partial_{1-2} & -(\bar{\partial} + \partial_3) & \partial_{2-1} \\ \partial_{3-2} & \partial_{2-3} & -(\bar{\partial} + \partial_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.138)$$

Для сокращения записи система приведена к матричной форме, в которой умножение "операторной матрицы" на столбец компонент производится по обычным правилам матричного умножения. При этом $\partial_{i-j} \equiv \partial_i - \partial_j$. Ввиду инвариантности свойства h -голоморфности относительно выбора базиса алгебры, можно утверждать, что общее решение системы (6.137)-(6.138) записывается с помощью представления U_i через F_i , выраженные через x -координаты:

$$U_1 = F(x_2 - x_1 - x_3) + F(x_3 - x_1 - x_2); \quad U_2 = F(x_1 - x_2 - x_3) + F(x_3 - x_1 - x_2);$$

$$U_3 = F(x_1 - x_2 - x_3) + F(x_2 - x_1 - x_3). \quad (6.139)$$

Этот факт можно проверить непосредственной подстановкой (6.139) в (6.137)-(6.138) Комбинации координат в аргументах функции F являются высшими аналогами запаздывающего и опережающего аргументов на двойной плоскости.

Оператор третьего порядка

$$\Delta^{(3)} \equiv \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial h^\dagger} \frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = (e_1 + e_2 + e_3) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \quad (6.140)$$

пропорционален алгебраической единице, поэтому

$$\Delta^{(3)} F = (\Delta^{(3)} U_1) j_1 + (\Delta^{(3)} U_2) j_2 + (\Delta^{(3)} U_3) j_3 \quad (6.141)$$

для всякой гладкой функции $F(h, h^\dagger, h^\ddagger)$. Если функция F — h -голоморфная, то ввиду того, что оператор $\Delta^{(3)}$ содержит дифференцирование по h^\dagger и h^\ddagger , имеет место соотношение $\Delta^{(3)} F \equiv 0$, эквивалентное трем его компонентам:

$$\Delta^{(3)} U_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.142)$$

Соотношения (6.142) является 3-мерным аналогом условий гармоничности или гиперболической гармоничности, которым тождественно удовлетворяют голоморфные функции комплексной или соответственно двойной переменной. В x -координатах оператор $\Delta^{(3)}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta^{(3)} = & -\frac{1}{8}(\partial_1 + \partial_2)(\partial_2 + \partial_3)(\partial_3 + \partial_1) = \\ & -\frac{1}{8}(2\partial_{123} + \partial_{112} + \partial_{221} + \partial_{113} + \partial_{331} + \partial_{223} + \partial_{332}), \end{aligned} \quad (6.143)$$

где $\partial_{ijk} \equiv \partial_i \partial_j \partial_k$.

Литература

- [1] Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев, *h-голоморфные функции двойной переменной и их приложения*, ГЧГФ **13** (2010) с. 44-77.
- [2] Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев, *Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной*, ГЧГФ **13** (2010) с. 78-127.
- [3] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников, *Гиперкомплексные числа*, М.: Наука, 1973
- [4] М. А. Лаврентьев, Б. О. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, М.: Наука, 1977.
- [5] Г. И. Гарасько, *Начала финслеровой геометрии для физиков*, М.: Тетру, 2009.
- [6] Д.Г.Павлов, *Число, геометрия и физическая реальность* В сб. *Метафизика* (под ред. Ю. С. Владимирова) 2010.
- [7] С. С. Кокарев, *Введение в общую теорию относительности* Ярославль, Изд-во ЯрГУ, 2010
- [8] В. Паули, *Теория относительности*, М., Физматлит, 1991.
- [9] S.S.Kokarev, *Space-time as multidimensional elastic plate*, Nuovo Cimento **V113** (1998) pp. 1339-1350
- [10] S.S.Kokarev, *Space-time as strongly bent plate*, Nuovo Cimento **V114** (1999) pp. 903-921
- [11] S.S.Kokarev, *Classical solids dynamics as 4D static of elastic strings*, Nuovo Cimento **V116** (2001) pp. 915-936
- [12] Г. И. Гарасько, *Теория поля и финслеровы пространства*, ГЧГФ, 2(6), **3**, 2006.
- [13] С. С. Кокарев, *Три лекции о законах Ньютона*, В сб. трудов РНОЦ Логос, вып. 1 (2006), с. 45-72.
- [14] Д.Г.Павлов, С.С.Кокарев, *Римановы метрики, соприкасающиеся с 3-мерной финслеровой метрикой Бервальда-Моора*, ГЧГФ, (2008) 2(10), с. 15-24.