Некоммерческое Партнерство
Региональный Научно-Образовательный Центр
"Логос"

Кинематика

2009–2010 учебный год

Ярославль 2009

Оглавление

1. Аннотация

Данное методическое пособие состоит из отдельных статей по кинематике, основные идеи которых публиковались в разных изданиях (в некоторых из них в значительной степени сохранен текст оригиналов). В этих статьях обсуждаются важные вопросы кинематики, которым, на наш взгляд, в школе уделяется недостаточно внимания (либо они просто не рассматриваются, как, например, кинематика твердого тела). Все рассматриваемые вопросы сопровождаются примерами решения тех или иных практически значимых задач.

Пособие рекомендовано для учащихся 9 –11-х классов.

2. Математический минимум по теме

Необходимо уметь:

- графически находить сумму или разность векторных величин, определять проекцию вектора на направление, раскладывать вектор на составляющие;
- осуществлять простейшие алгебраические операции над величинами;
- графически изображать функцию.

Необходимо знать:

- тригонометрические функции sin, cos, tg, ctg и простейшие соотношения между ними.

3. Основные понятия кинематики

Траектория — это линия, которую описывает движущаяся материальная точка в пространстве. Линия может иметь любую форму. Она может быть прямой — и тогда движение тела[1] вдоль такой линии называют ***прямолинейным.*** Движение вдоль кривой линии

[1]Все определения и формулы, приведенные для тела в разделе “Основные понятия кинематики”, справедливы для материальной точки

соответственно называют ***криволинейным.*** Например, траектория свободно падающего тела по отношению к Земле — прямая, а траектория тела, брошенного под углом к горизонту, — кривая (парабола, если пренебречь сопротивлением воздуха).

Путь — это длина пройденного телом участка его траектории (измеренная в сантиметрах, метрах и т.д.)

При описании движения тела в кинематике используется и другая физическая величина — ***перемещение***, под которым понимается вектор $\vec{S}$, соединяющий начальное положение движущейся точки A с конечным его положением B (рис. 3.1).

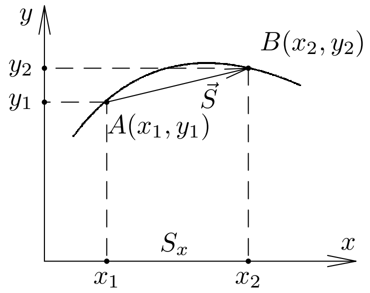

Рис. 3.1

Проекции вектора перемещения на оси координат равны изменениям соответствующих координат точки начала и конца вектора:

$$S_x = x_2 - x_1, \qquad S_y = y_2 - y_1.$$

Из рис. 3.1 видно, что путь и модуль перемещения не равны друг другу. Только в одном частном случае, когда траектория — прямая линия, и движение осуществляется в одном направлении, модуль перемещения и путь совпадают.

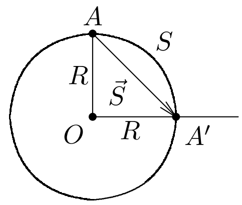

Рис. 3.2

Пример 1. Свободно вращающееся вокруг оси колесо радиуса R поворачивается на $1/4$ оборота. Каков при этом пройденный путь и величина (модуль) перемещения точек обода колеса?

Решение. При повороте на $1/4$ оборота каждая точка обода пройдет путь, равный $1/4$ длины окружности, т.е.

$$S = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

Величина перемещения определяется длиной вектора $\vec{S}$, которая, как легко видеть из треугольника AOA', равна $|\vec{S}| = \sqrt{2}R$. При таком движении величины пути и перемещения не совпадают. ▲

4. Средняя скорость

Когда мы говорим о скорости движения тел в окружающем нас мире, чаще всего подразумеваем ***среднюю скорость***. Именно она позволяет оценить пройденное расстояние, зная время движения, или, наоборот, найти время движения по пройденному пути. Для определения средней скорости мы истинное сложное неравномерное движение мысленно заменяем простым равномерным движением, при котором тело проходит тот же путь за то же время. Обратите внимание на то, что в физике вводятся два различных понятия средней скорости: в первом случае скорость определяется по полному пройденному пути и характеризуется только своей величиной — это так называемая среднепутевая скорость; во втором случае средняя скорость определяется по перемещению и характеризуется как величиной, так и направлением (векторная скорость).

Итак, среднепутевая скорость $v_{\text{ср}} = \frac{\ell}{t}$, где ℓ – пройденный путь за время t, а средняя скорость по перемещению (или просто средняя скорость)

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\vec{S}}{t},$$

где $\vec{S}$ – перемещение за время t.

Среднепутевая скалярная скорость, вообще говоря, не совпадает с модулем векторной средней скорости. Так, среднепутевая скорость для Земли при ее орбитальном движении вокруг Солнца составляет 30 км/с, в то время как средняя скорость по перемещению для разных промежутков времени разная, а для промежутка времени, равного одному году, равна 0. Численное равенство среднепутевой скорости и скорости по перемещению выполняется только в случае прямолинейного движения тела в одном направлении. В практике более употребительной оказывается среднепутевая скорость и ниже речь будет идти именно о скалярной средней скорости. Проделаем два мысленных опыта.

Предположим, что Вы сидите в движущемся автомобиле с секундомером в руках рядом с водителем, который может по Вашему указанию мгновенно менять скорость. В окно можно наблюдать за километровыми столбиками. В первом опыте водитель по Вашему сигналу меняет скорость каждую минуту: $v_1 = 40$ км/ч, $v_2 = 60$ км/ч, $v_3 = 80$ км/ч, $v_4 = 20$ км/ч.

Во втором опыте скорость меняется каждый пройденный километр. Одинаковы ли средние скорости движения в этих двух случаях?

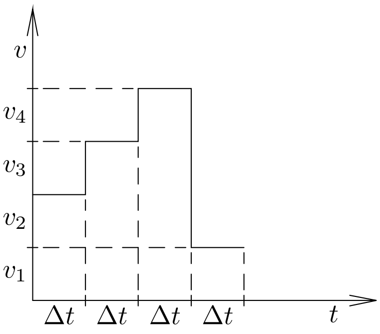

Рис. 4.1

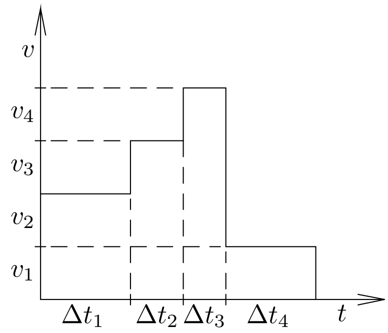

Рис. 4.2

В первом случае движение построено так, что на каждом участке, где скорость автомобиля была постоянна, автомобиль двигался в течение одного и того же промежутка времени Δt (рис. 4.1).

$$v_{\text{ср}} = \frac{\ell}{t} = \frac{v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t + v_4\Delta t}{4\Delta t} = \frac{1}{4}(v_1+v_2+v_3+v_4) = 50\,\text{км/ч}.$$

Во втором случае одинаковы не времена движения на каждом участке, а пройденные пути $\Delta\ell$ (рис. 4.2), и средняя скорость во втором случае

$$v'_{\text{ср}} = \frac{\ell}{t} = \frac{4\Delta\ell}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4} = \frac{4\Delta\ell}{\frac{\Delta\ell}{v_1} + \frac{\Delta l}{v_2} + \frac{\Delta l}{v_3} + \frac{\Delta\ell}{v_4}} =$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}} = 38\,\text{км/ч}.$$

Как видите, вычислять среднюю скорость как среднее арифметическое скоростей на каждом участке движения можно не во всех случаях. Поэтому при вычислении средней скорости лучше пользоваться общим определением $v_{\text{ср}} = \frac{\ell}{t}$, которое справедливо **всегда**. Рассмотрим конкретный пример на эту тему.

Пример 2. Груженый автомобиль из города A в город B двигался со средней скоростью $v_1 = 40\,\text{км/ч}$, а возвращаясь обратно порожняком, развил среднюю скорость на этом же отрезке пути в $v_2 = 60$ км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля?

Решение. Велик соблазн и в этом случае для определения средней скорости сложить скорости и разделить пополам. Однако это неверно. Обозначим расстояние между городами через S. Тогда весь пройденный путь $\ell = 2S$, а время движения

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2}.$$

Воспользовавшись определением средней скорости, получим

$$v_{\text{ср}} = \frac{l}{t} = \frac{2S}{\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 48\,\text{км/ч}. \ \blacktriangle$$

5. Кинематические соотношения

Для описания движения материальной точки пользуются следующими кинематическими величинами: перемещением $\vec{S}$, скоростью $\vec{v}$ и ускорением $\vec{a}$. Сами они и их проекции на оси координат связаны между собой кинематическими формулами.

Для прямолинейного равномерного движения они имеют вид: $\vec{S} = \vec{v}t$, или $S_x = v_x t$, где t — время, отсчитываемое от начального момента.

Для прямолинейного равноускоренного движения с начальной скоростью $\vec{v}_0$ формулы кинематики имеют вид:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$

$$\vec{S} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

и в проекциях на ось x, совпадающую с направлением движения:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \qquad S_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x S_x.$$

При описании вращательного движения тела величинами $\vec{S}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ пользоваться неудобно, так как различные точки тела за один и тот же промежуток времени совершают разные перемещения и двигаются с разными скоростями и ускорениями. Поэтому удобно ввести так называемые угловые величины: угол поворота φ, угловую скорость ω и угловое ускорение ε:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Важно, что для различных (всех) вращающихся точек тела они в один и тот же момент времени одинаковы.

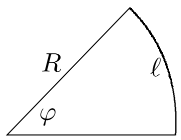

Рис. 5.1

Из геометрических соображений (рис. 5.1), угловые величины связаны с линейными простыми соотношениями:

$$\ell = R\varphi, \qquad v = R\omega, \qquad a = \varepsilon R,$$

где ℓ и v — путь и модуль скорости вращающейся материальной точки, a — модуль касательной проекции ускорения. (При движении точки по окружности вектор ускорения может иметь две проекции: на направление к центру окружности — центростремительное ускорение, которое характеризует быстроту изменения скорости по направлению, и на направление касательной к окружности — касательное ускорение, характеризующее быстроту изменения величины скорости). Такая простая связь линейных и угловых величин определяет простое подобие кинематических формул вращательного движения и приведенных выше кинематических формул.

Так, при равномерном вращении тела (угловая скорость постоянна) зависимость угла поворота φ от времени имеет вид

$$\varphi = \omega t.$$

При равноускоренном вращении угловая скорость изменяется со временем по формуле

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость, и зависимость угла со временем определяется соответственно выражением

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Точно так же между углом поворота, угловой скоростью и угловым ускорением существует связь:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

Вообще любая формула кинематики вращательного движения тела получается из соответствующей формулы кинематики точки простой заменой линейной величины соответствующей угловой.

6. Главная задача кинематики

Громадное большинство кинематических задач выглядит более или менее одинаково: известны положение и скорость тела в какой-то момент времени и характер его движения, надо определить положение и скорость тела в некоторый другой момент времени.

Поясним подробнее, что понимается под словами "известны положение и скорость тела в какой-то момент". Эти слова означают, вопервых, что выбраны тело отсчета и система координат, и, во-вторых, что выбрано начало отсчета времени. Другими словами, **выбрана система отсчета**. Это важнейший элемент описания любой физической ситуации. Дальше. Положение тела в любой момент времени t задается его координатами x, y, z, а изменение координат — вектором перемещения $\vec{S}$. Слова "известен характер движения" означают, что известен вид функции $\vec{S}(t)$, или, что то же самое, вид функций $x(t), y(t), z(t)$.

В мире существует огромное разнообразие движений.

Простые движения описываются функциями: равномерное прямолинейное движение — линейной функцией $x = x_0 + vt$ или $\vec{S}(t) = \vec{v}t$, прямолинейное равноускоренное движение — квадратичной функцией $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$ или $\vec{S}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{a}t^2/2$, равномерное движение по окружности с угловой скоростью ω: $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$ и т.д.

А для описания таких движений как движение точки обода катящегося колеса или движение планет относительно Земли понадобятся гораздо более сложные функции. Но в принципе это можно сделать всегда, и метод решения основной кинематической задачи универсален и не зависит от типа движения. Теперь последняя фраза в формулировке задачи: "надо определить положение и скорость тела в некоторый другой момент времени". Здесь основная проблема состоит в том, что этот другой момент времени, как правило, указывается весьма расплывчато. Очень редко говорится прямо, в какой именно момент времени надо найти положение и скорость тела. В большинстве случаев он задается каким-то дополнительным условием. Используя это условие, нужно найти момент времени в который оно выполняется, а затем время движения подставить в выражение для перемещения или координаты и скорости тела.

"Расшифровав" таким образом содержание основной задачи кинематики, мы фактически сформулировали алгоритм ее решения:

1. Выбрать систему отсчета (в некоторых случаях желателен рисунок).

2. Определить характер движения.

3. Записать перемещение и скорость (в проекциях на соответствующие оси координат) как функции времени; если в задаче рассматриваются несколько движущихся тел, уравнение движения нужно записать для каждого тела отдельно.

4. Используя дополнительные условия, определить конечный момент времени. Подставить время движения в уравнение для интересующей нас величины — и задача решена.

Обратимся теперь к конкретным примерам.

Пример 3. Вспомните, как в сказке А.С. Пушкина Гвидон спасает царевну Лебедь метким выстрелом стрелы в коршуна. Начальные условия задачи, которую одним махом решил Гвидон, выглядят так: коршун находится прямо над царевной на высоте H (помните: "бьется лебедь средь зыбей, коршун носится над ней") и камнем пикирует (т.е. свободно падает) на нее. Предположим, что начальная скорость коршуна равна нулю, Гвидон находится на расстоянии L от царевны, начальная скорость стрелы равна v_0. Спрашивается, под каким углом к горизонту должен стрелять царевич, чтобы попасть в коршуна? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Будем решать задачу по намеченному плану.

1. Выберем систему координат, показанную на рис. 6.1. Начало отсчета времени пусть будет совпадать с моментом выстрела.

2. Свободное падение коршуна — это равноускоренное прямолинейное движение с ускорением $g = 9,8\,\text{м/с}^2$. Движение стрелы более сложное — траекторией является парабола, а скорость меняется как

по величине, так и по направлению. Такое движение проще рассматривать в проекциях на координатные оси. Координата x стрелы с течением времени изменяется так же, как при прямолинейном равномерном движении, а координата y — как при равноускоренном движении с тем же, что и у коршуна ускорением $\vec{g}$.

3. Запишем уравнения движения обоих тел в проекциях на оси x и y:

$$x_{\text{к}} = L, \qquad y_{\text{к}} = H - \frac{gt^2}{2}$$

(из рисунка видно, что направление вектора $\vec{g}$ противоположно положительному направлению оси y, поэтому проекция вектора $\vec{g}$ на ось y дает $-g$).

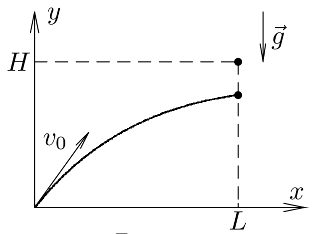

Рис. 6.1

$$x_{\text{с}} = v_0 \cos\alpha t; \qquad y_{\text{с}} = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

4. В качестве дополнительного условия используем равенство координат стрелы и координат коршуна в момент попадания стрелы ($t = t_{\text{в}}$)

$$L = v_0 t_{\text{в}} \cos\alpha\,;$$
$$H - \frac{gt_{\text{в}}^2}{2} = v_0 t_{\text{в}} \sin\alpha - \frac{gt_{\text{в}}^2}{2}.$$

Мы получили два уравнения с двумя неизвестными $t_{\text{в}}$ и α, решая которые относительно неизвестного угла α, находим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{L}\,.$$

Зная угол α, можно найти время встречи и координату места встречи.

Заметим, что похожий метод используется при наведении на цель движущихся ракет. Локатор непрерывно определяет координаты цели, ЭВМ — решая соответствующие уравнения, аналогичные нашим, — находит точку встречи ракеты с целью и вносит коррективы в движение ракеты, направляя соответствующие указания в управление двигателем. ▲

Попробуем применить подобный метод к решению другой задачи.

Пример 4. Упругий шарик падает из состояния покоя на наклонно поставленную стенку, пролетев высоту $h = 20\,\text{см}$. На каком расстоянии от места падения он второй раз ударится о стенку? Угол наклона стенки к горизонту $\alpha = 30^\circ$.

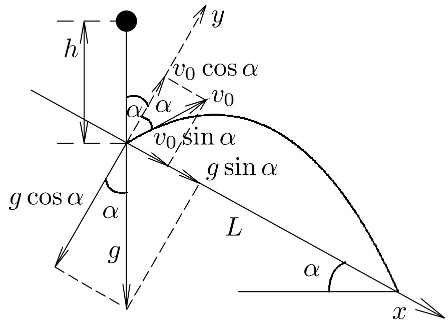

Рис. 6.2

Решение. Обозначим искомое расстояние через L и выберем систему координат, как указано на рис. 6.2. В силу упругости удара угол отскока равен углу падения. Начало отсчета времени совместим с первым ударом шарика о стенку. Движение шарика от одного соударения до другого является равноускоренным криволинейным движением с ускорением $\vec{g}$. Это движение эквивалентно двум прямолинейным равноускоренным движениям вдоль координатных осей x и y (ускорение соответственно вдоль осей $g\sin\alpha$ и $g\cos\alpha$) с начальной скоростью $v_0 \sin\alpha$ вдоль оси x и $v_0\cos\alpha$ вдоль оси y.

3. Записываем уравнения движения шарика вдоль осей:

$$x = v_0 \sin\alpha t + \frac{g\sin\alpha t^2}{2}, \qquad v_x = v_0\sin\alpha + g\sin\alpha t;$$

$$y = v_0 \cos\alpha t - \frac{g\cos\alpha t^2}{2}, \qquad v_y = v_0\cos\alpha + g\cos\alpha t.$$

4. Учитываем, что в момент второго соударения шарика с наклонной стенкой координата $y = 0$. Из получившегося уравнения находим время движения между двумя соударениями:

$$v_0\cos\alpha t - \frac{g\cos\alpha t^2}{2} = 0,$$

откуда $t = \frac{2v_0}{g}$. Другое значение $t = 0$ соответствует точке первого соударения шарика. Подставляя значение t в выражение для координаты x, получим

$$L = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{2v_0}{g} + \frac{2g \sin\alpha v_0^2}{g^2} = 4\frac{v_0^2}{g} \sin\alpha.$$

Наконец, учтя, что на начальном участке пути шарик падал свободно и воспользовавшись формулами прямолинейного равноускоренного движения, заменим $v_0^2 = 2gh$. Окончательно получим

$$L = 8h \sin\alpha = 8 \cdot 0,2 \cdot \frac{1}{2} = 0,8 \text{ м}.$$

Заметим, что проекция скорости вдоль оси y в момент второго соударения не изменится по величине

$$v_y = v_0 \cos\alpha - g \cos\alpha \frac{2v_0}{g} = -v_0 \cos\alpha,$$

т.е. после второго упругого отскока скорость вдоль оси y станет равной $v_0 \cos\alpha$. А это означает, что время движения шарика до следующего соударения тоже не изменится и будет равно $\frac{2v_0}{g}$.

Таким образом, хотя расстояния вдоль наклонной плоскости от одного отскока до другого растут (ускорение $g \sin\alpha$), время на каждом из этих участков движения шарика остается одним и тем же. ▲

7. Относительность поступательного движения

Движение любого тела (или материальной точки) относительно, т.е. перемещение тела, его скорость, ускорение и траектория движения зависит от выбора системы координат. Когда одна система отсчета (СО) движется относительно другой поступательно, перейти из неподвижной системы в движущуюся легко. Для этого достаточно правильно записать закон сложения скоростей или закон сложения перемещений:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{12} + \vec{v}_2, \qquad \vec{S}_1 = \vec{S}_{12} + \vec{S}_2, \tag{7.1}$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{S}_1$ — скорость и перемещение тела относительно покоящейся системы отсчета (СО), $\vec{v}_2$ и $\vec{S}_2$ — скорость и перемещение второй системы отсчета относительно покоящейся СО, $\vec{v}_{12}$ и $\vec{S}_{12}$ — скорость и перемещение тела относительно второй движущейся СО.

При неравномерном движении как тела, так и системы отсчета, справедлив закон сложения ускорений:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{12} + \vec{a}_2, \tag{7.2}$$

где $\vec{a}_1$ ускорение тела относительно покоящейся СО, $\vec{a}_2$ — ускорение второй (движущейся) системы отсчета относительно покоящейся СО, $\vec{a}_{12}$ — ускорение тела относительно движущейся СО.

Более удобный для запоминания вид этих соотношений представляет собой выражения относительных перемещения, скорости, ускорения:

$$\vec{S}_{12} = \vec{S}_1 - \vec{S}_2, \qquad \vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \qquad \vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2.$$

Обратите особое внимание на векторный характер соотношений. Отметим также, что все **сказанное справедливо лишь для поступательного движения одной СО относительно другой** (координатные оси движущейся СО все время параллельны осям неподвижной СО), и, кроме того, скорости движения должны быть малыми по сравнению со скоростью света $c = 300000$ км/с, иначе вступают в силу закономерности теории относительности Эйнштейна, которые отличаются от вышеприведенных.

Зачем нужно вообще менять систему отсчета? Во-первых, во многих ситуациях мы просто вынуждены привлекать вторую СО — без этого нельзя решить поставленную задачу. Рассмотрим пример.

Пример 5. По приборам, установленным на самолете, известна скорость движения самолета относительно воздуха и положение самолета (курс на северо-восток) По данным метеослужбы известна скорость ветра $v_в$, направленного с востока на запад. Определить, с какой скоростью и в каком направлении перемещается самолет относительно Земли.

Решение. Запишем закон сложения скоростей
$$\vec{v}_{\text{с}} = \vec{v}_{\text{св}} + \vec{v}_{\text{в}}$$
и представим его графически (рис. 7.1). По двум сторонам и углу можно найти все остальные элементы треугольника

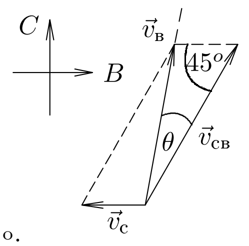

Рис. 7.1

$$v_{\text{с}}^2 = v_{\text{св}}^2 + v_{\text{в}}^2 - 2v_{\text{св}}v_{\text{в}}\cos 45^{\circ};$$
$$v_{\text{с}} = \sqrt{v_{\text{св}}^2 + v_{\text{в}}^2 - \sqrt{2}v_{\text{св}}v_{\text{в}}};$$
$$\frac{\sin\theta}{v_{\text{в}}} = \frac{\sin 45^{\circ}}{v_{\text{с}}};$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v_{\text{в}}}{v_{\text{с}}};$$
$$\theta = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v_{\text{в}}}{v_{\text{с}}}. \ \blacktriangle$$

Во-вторых, часто переход в другую систему отсчета, хотя и не является обязательным, может сделать ситуацию более наглядной и существенно упростить решение задачи.

Пример 6. Скорости движения двух кораблей заданы графически (рис. 7.2 а). Определить графически, на каком наименьшем расстоянии пройдут друг относительно друга корабли.

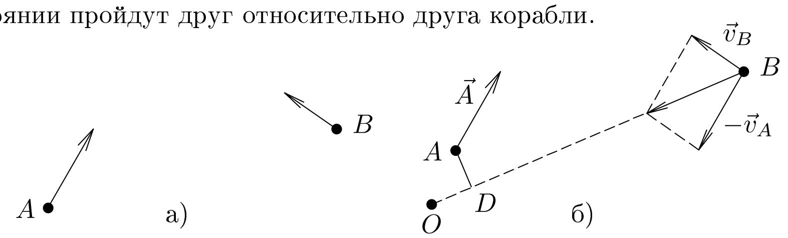

Рис. 7.2

Решение. Выберем один из движущихся кораблей, например A, в качестве СО, и определим скорость корабля B в этой СО. Для этого из точки B отложим вектор, равный $-\vec{v}_A$, и найдем, по правилу параллелограмма сумму векторов $\vec{v}_B$ и $-\vec{v}_A$ (рис. 7.2 б). Это и будет вектор $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{BA}$, являющийся скоростью корабля B в системе отсчета, связанной с кораблем A. В этой СО корабль B будет двигаться вдоль прямой BO. Опустив перпендикуляр из точки A на эту прямую, получим AD — кратчайшее расстояние, на котором пройдут корабли друг мимо друга. ▲

Заметим, что хотя с точки зрения динамики не все СО равноправны — есть так называемые инерциальные СО, в которых законы динамики приобретают особенно простой вид — с точки зрения кинематики все СО равноправны, можно использовать любые, в том числе движущиеся ускоренно и даже вращающиеся.

8. Относительность вращательного движения

А как все же быть, если одна система совершает относительно другой вращательное движение?

Пример 7. Предположим, что космический корабль C приближается со скоростью $v_{\text{с}}$ к вращающейся с угловой скоростью планете B, находясь в ее экваториальной плоскости (см. рис. 8.1). Какой будет скорость корабля с точки зрения наблюдателей на планете в тот момент, когда расстояние до поверхности планеты равно ее радиусу R?

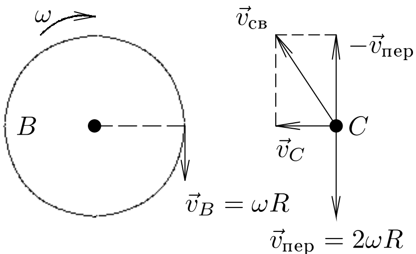

Рис. 8.1

Решение. Линейная скорость наблюдателя на планете $v = \omega R$ и, если применить закон сложения скоростей для поступательно движущихся систем (что часто и делают!), то получится неверный результат $v'_{\text{св}} = \sqrt{v_{\text{с}}^2 + (\omega R)^2}$. ($\vec{v}_{\text{св}} = \vec{v}_{\text{с}} - \vec{v}_{\text{в}}$)

Дело в том, что точка C относительно наблюдателя на планете B будет неподвижной, если она будет вращаться с такой же угловой скоростью ω, т.е. ее линейная скорость должна быть $v_{\text{пер}} = 2\omega R$. Эту скорость называют переносной.

Следовательно скорость корабля относительно вращающейся СО равна:

$$\vec{v}_{\text{св}} = \vec{v}_{\text{с}} - \vec{v}_{\text{пер}}, \qquad v_{\text{св}} = \sqrt{v_{\text{с}}^2 + (2\omega R)^2}. \ \blacktriangle$$

Итак, общее правило состоит в том, что закон сложения скоростей можно применять и в случае вращающихся СО, но нужно брать скорость не самой СО (это понятие не имеет смысла — разные точки вращающейся системы отсчета движутся по разному), а переносную скорость — скорость той точки вращающейся системы, где в данный момент находится тело:

$$\vec{v}_{\text{с}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{с}} - \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Это правило выглядит вполне очевидным, если вы находитесь непосредственно на вращающемся теле. Тогда переносная скорость — это скорость тела у вас под ногами (если вы остановитесь, вращающееся тело будет “переносить” вас в пространстве именно с этой скоростью). Психологически труднее сообразить как вычислить переносную скорость, когда движущееся тело находится вне вращающегося тела (планеты). Для этого мысленно надо распространить планету на окружающее пространство и вычислить переносную скорость, умножив угловую скорость на радиус точки нахождения тела относительно оси вращения.

9. Движение со связями

Если тело (материальная точка) участвует одновременно в двух независимых движениях, то его перемещение можно найти путем векторного сложения перемещений вдоль каждого из направлений. Соответственно, скорость результирующего движения равна векторной сумме скоростей составляющих движений:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \tag{9.3}$$

Иногда бывает удобно представить некоторое сложное движение как суперпозицию, т.е. наложение двух простых движений. В этом случае равенство (9.3) можно трактовать как правило разложения вектора на составляющие.

Ситуация меняется, если в результате действующих связей движения не являются независимыми.

Пример 8. Лодку подтягивают к берегу за привязанный к ее носу трос, наматывая его на равномерно вращающийся барабан (рис. 9.1), который установлен на высоком берегу. С какой скоростью u движется лодка в тот момент, когда трос образует угол α с горизонтом. Трос выбирается барабаном со скоростью v.

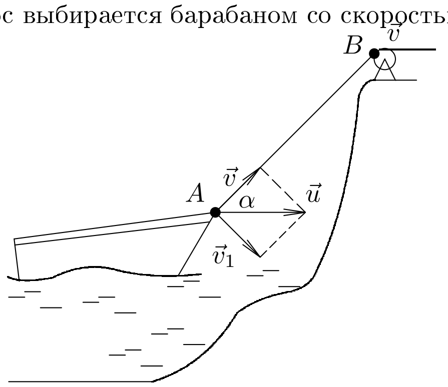

Рис. 9.1

Решение. Точка A троса, где он привязан к лодке, движется с той же скоростью, что и лодка. Эта скорость $\vec{u}$ направлена горизонтально. С другой стороны, поскольку трос выбирается со скоростью $\vec{v}$, в силу нерастяжимости троса все его точки вдоль направления троса движутся с такой же скоростью, в том числе и точка A. Значит, проекция скорости $\vec{u}$ на направление троса должна быть равна v. Или, иначе говоря, скорость $\vec{u}$ мы можем разложить на две составляющие, из которых одна направлена вдоль троса и равна по модулю скорости вытягивания троса v, а другая, перпендикулярная направлению вытягивания и поэтому не влияющая на величину v, определяет скорость поворота точки A относительно точки B. Из треугольника скоростей легко получается соотношение для величины скорости u:

$$u = \frac{v}{\cos\alpha}.$$

По мере приближения лодки к берегу угол α возрастает, $\cos\alpha$ убывает, а искомая скорость u возрастает. ▲

Пример 9. Баржа C буксируется по каналу при помощи двух лебедок A и B, установленных на разных берегах канала. Каждая из лебедок наматывает трос с постоянной скоростью v_A и v_B. Скорости наматывания тросов в некотором масштабе указаны на рисунках. Постройте вектор скорости баржи для обоих случаев.

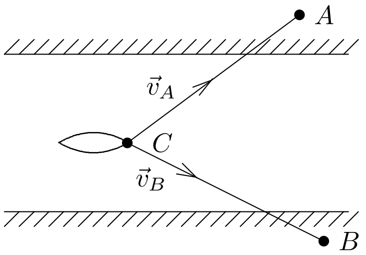

Рис. 9.2

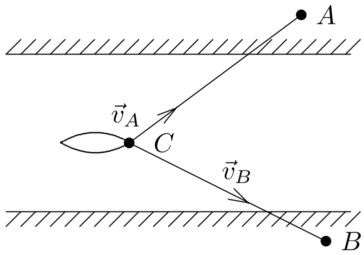

Рис. 9.3

Решение. Рассмотрим обратную задачу. Пусть известен вектор скорости баржи. Зададим вопрос: с какой скоростью баржа приближается к точке A? Разложим вектор скорости баржи на две перпендикулярные составляющие — вдоль направления CA и перпендикулярно к нему.

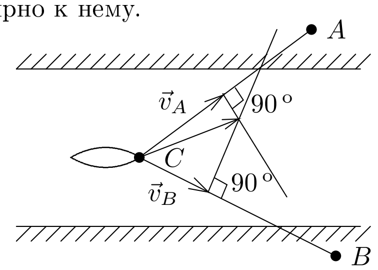

Рис. 9.4

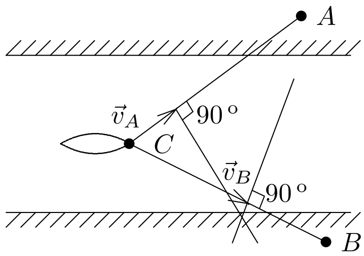

Рис. 9.5

Очевидно, что компонента скорости баржи, перпендикулярная направлению CA, никак не влияет на изменение расстояния CA. Изменение расстояния CA зависит лишь от компоненты вектора скорости баржи вдоль направления CA. Это и есть скорость, с которой лебедка A наматывает трос на барабан. Совершенно такое же рассуждение применимо и к тросу, соединяющему баржу с лебедкой B. Теперь ясно, как решить прямую задачу: построить вектор скорости баржи, если известны ее перпендикулярные проекции на направления тросов. Нужно построить перпендикуляры из концов заданных векторов скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ до пересечения. Полученная точка и будет концом вектора скорости баржи. На первом чертеже этот способ прекрасно сработает, и искомая скорость сразу будет найдена. Однако на втором чертеже точка пересечения перпендикуляров находится вне угла ACB. Эта ситуация требует дополнительного обсуждения. Тросы, когда они натянуты, действуют на баржу с силами, величина которых нам неизвестна, но направление действия всегда совпадает с направлением троса. Вектор суммы этих сил всегда находится внутри угла, образованного тросами. Во втором случае построенный вектор скорости корабля вышел за пределы этого угла, и это означает, что одна из лебедок просто не успевает выбирать трос. Он начинает провисать и перестает воздействовать на баржу. ▲

10. Кинематика твердого тела

Любое сложное движение твердого тела можно свести к совокупности двух простых движений: поступательному и вращательному.

Поступательным называют такое движение, при котором тело перемещается параллельно самому себе. При таком движении любая мысленно проведенная в теле прямая перемещается параллельно самой себе. Примерами таких движений являются движение кабины известного аттракциона “колесо обозрения”, движение педали велосипеда, движение лыжника — спортсмена во время прыжка с трамплина и т.д. Поступательные движения могут быть как прямолинейными, так и криволинейными, о чем говорят приведенные примеры. При поступательном движении все точки тела получают за один и тот же промежуток времени равные по величине и и по направлению перемещения, вследствие чего скорости и ускорения **всех** точек в **каждый момент времени** оказываются одинаковыми.

Поэтому достаточно определить движение одной из точек тела (например, центра тяжести) для того, чтобы полностью охарактеризовать движение всего тела. При ***вращательном*** движении все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения.***

Для описания вращательного движения нужно знать положение в пространстве оси вращения и угловой скорости тела в каждый момент времени. (Напомним, что угловая скорость в любой момент времени одна и та же для всех вращающихся точек тела.)

Рассмотрим случай ***плоского*** (или ***плоско-параллельного***) движения, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Он важен для нас хотя бы потому, что примерами такого движения являются качение цилиндра или шара по плоскости, качение колес по дороге и т.п.

Произвольное перемещение твердого тела из положения 1 в положение 2 можно представить как сумму двух перемещений — поступательного перемещения из положения 1 в $1'$ или $1''$ и поворота вокруг оси O' или O'' (рис. 10.1). Такое разбиение перемещения на поступательное и вращательное может быть осуществлено бесчисленным множеством способов, однако в любом случае поворот производится на один и тот же угол.

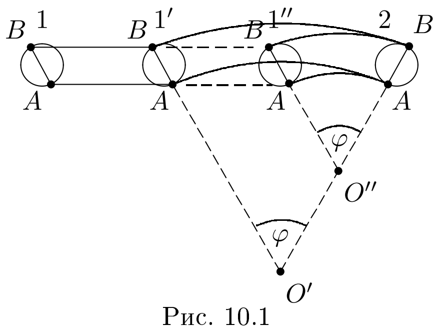

Рис. 10.1

Рассмотрим теперь малое перемещение какой либо точки твердого тела. Чтобы малые перемещения (их иногда называют элементарными) отличать от любых конечных, будем приписывать рядом греческую букву Δ (дельта). В соответствии с изложенным выше малое перемещение какой-либо точки $\Delta\vec{S}$ можно представить в виде суммы двух перемещений — поступательного $\vec{\Delta}S_{\text{п}}$ и вращательного $\vec{\Delta}S_{\text{в}}$:

$$\Delta\vec{S} = \Delta\vec{S}_{\text{п}} + \Delta\vec{S}_{\text{в}},$$

причем $\Delta\vec{S}_{\text{п}}$ — одинаковое для всех точек. Такое разложение перемещения $\Delta\vec{S}$, можно, как мы видели, осуществить различными способами, причем в каждом случае вращательное перемещение $\Delta\vec{S}_{\text{в}}$ осуществляется на один и тот же угол $\Delta\varphi$.

Поделив перемещение на отрезок времени Δt, за который это перемещение осуществляется, получим мгновенное значение скорости точки:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{S}_{\text{п}}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{S}_{\text{в}}}{\Delta t} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,',$$

где $\vec{v}_0$ — одинаковая для всех точек скорость поступательного движения, $\vec{v}\,'$ — различная для разных точек скорость, обусловленная вращением с одной и той же угловой скоростью $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Таким образом, плоское движение твердого тела можно представить как сумму двух движений — поступательного со скоростью $\vec{v}_0$ и вращательного с угловой скоростью ω.

Подобное представление сложного движения можно осуществить множеством способов, отличающихся значениями $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_1$, но соответствующих **одной и той же угловой скорости ω.**

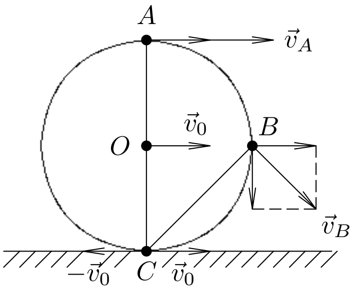

Рис. 10.2

Этот вывод означает, например, что если в случае качения цилиндра без проскальзывания по плоскости мы знаем скорость движения какой-либо точки (например, лежащей на оси), то скорости всех остальных можно представить в виде суммы этой скорости $\vec{v}_0$ и скорости вращения относительно этой точки с одной и той же угловой скоростью (рис. 10.2).

Наконец, выбрав скорость поступательного перемещения равной нулю, мы можем плоское движение свести к одному повороту опять-таки с той же угловой скоростью ω. В рассматриваемом примере с качением цилиндра такой точкой является точка касания цилиндра с плоскостью C. Линейная скорость v' точки, обусловленной вращением твердого тела, равна $v' = \omega r$, а направление вектора v' перпендикулярно радиусу r, проведенному из центра вращения в точку, скорость которой определяется (см. например, скорость точки B на рис. 10.2). Ось, проходящая через такую неподвижную точку (точка C на рисунке), называется ***мгновенной осью вращения.*** В случае катящегося цилиндра она совпадает с линией касания цилиндра с плоскостью и перемещается как по плоскости, так и по поверхности цилиндра.

Следовательно, плоское движение твердого тела можно рассматривать как ряд последовательных элементарных вращений вокруг мгновенных осей.

При этом, если скорость какой-либо точки известна (например, скорость точки O цилиндра равна v_0), то угловую скорость вращения всех точек можно определить из соотношения: $v_0 = \omega R$, где R — радиус поворота точки O относительно точки C и $w = \frac{v_0}{R}$.

Пример 10. Определить скорости точек обода A, B, C, D колеса, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью v_0 (рис. 10.3).

Решение. Со скоростью v_0 движется центр тяжести колеса (т.е. точка O на рис. 10.3). Скорость точки D, касающейся поверхности, равна нулю: $\vec{v}_D = 0$. Рассматривая такое плоское движение как ряд последовательных поворотов относительно мгновенного центра вращения — точки D, можно определить угловую скорость вращения. Точка O, вращаясь относительно точки D, имеет скорость v_0. Отсюда $v_0 = \omega R$ и $\omega = v_0/R$. Тогда скорость точки A:

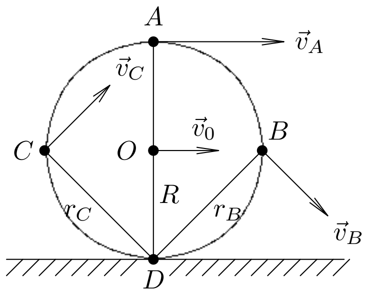

Рис. 10.3

$$v_A = \omega \cdot 2R = \frac{v_0}{R} \cdot 2R = 2v_0,$$

а скорости точек B и C

$$v_B = \omega r_B \quad \text{и} \quad v_C = \omega r_C.$$

Поскольку $r_B = r_C = \sqrt{2}R$, $v_B = v_C = \frac{v_0}{R}\sqrt{2}R = \sqrt{2}v_0$.

Направлены все скорости, как скорости поворота точек относительно точки D, перпендикулярно радиусам-векторам, проведенным из мгновенного центра вращения в точки A, B, C соответственно. Пусть вас не смущает, что эти направления не совпадают с касательными к окружности. Траекторией движения каждой точки обода при качении колеса является не окружность, а кривая, получившая название ***циклоиды*** (рис. 10.4). ▲

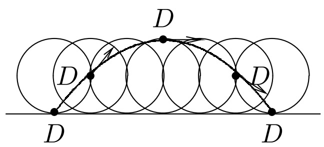

Рис. 10.4

Пример 11. На диск радиуса R намотаны две нерастяжимые нити, закрепленные в двух разных точках (рис. 10.5). При отпускании диск вращается. Когда угол между нитями у диска α, угловая скорость вращения диска ω. С какой скоростью в этот момент движется центр диска? Нити остаются натянутыми.

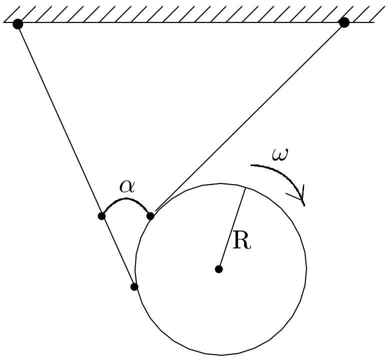

Рис. 10.5

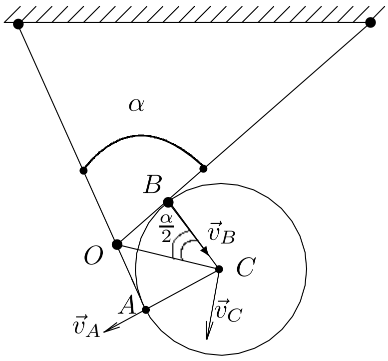

Рис. 10.6

Решение. Поскольку нити нерастяжимы, векторы скорости точек A и B перпендикулярны нитям (в противном случае была бы составляющая, направленная вдоль нити, а так как в одной точке каждая нить закреплена, нить должна была бы растягиваться). Сложное движение диска можно свести к повороту относительно мгновенного центра вращения, который находится в точке пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, т.е. к точке O (см.рис. 10.6). (Скорости любой точки перпендикулярны радиусу, проведенному из мгновенного центра вращения), см. предыдущий пример.

Вектор скорости центра диска C перпендикулярен OC и равен по модулю

$$|\vec{v}_C| = \omega \cdot OC = \frac{\omega R}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \ \blacktriangle$$

11. Рекомендуемая литература

1. Бутиков Е.И., А.С. Кондратьев. Физика, книга 1. Механика. — М.: Наука, 1994.

2. Мякишев Г.Я., Физика. Механика. — М.: Дрофа, 1996.

3. Элементарный учебник физики, под редакцией Г.С. Ландсберга, Т.1. — М.: Наука, 1985.

12. Основные формулы по теме

1. Средняя по перемещению скорость:
$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\vec{S}}{\Delta t}.$$
2. Средняя путевая скорость:
$$v_{\text{ср}} = \frac{\ell}{\Delta t}.$$
3. Законы относительного движения:
$$\vec{S}_1 = \vec{S}_{12} + \vec{S}_2; \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_{12} + \vec{v}_2; \quad \vec{a}_1 = \vec{a}_{12} + \vec{a}_2.$$
4. Закон равномерного прямолинейного движения:
$$\vec{S} = \vec{v}t.$$
5. Закон прямолинейного равноускоренного движения:
$$\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$
6. Закон изменения скорости при прямолинейном равноускоренном движении:
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$
7. Угловое ускорение:
$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$
8. Связь угловых и линейных величин:
$$\ell = R\varphi; \quad v = R\omega; \quad a = R\varepsilon.$$
9. Закон равномерного вращения:
$$\varphi = \omega t.$$
10. Закон равноускоренного вращения:
$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

13. Вопросы

Вопрос 1. [3 балла] Может ли тело: а) иметь вектор скорости, равный нулю, и в то же время двигаться ускоренно?

б) иметь скорость, постоянную по величине, при изменяющемся векторе скорости?

в) обладать постоянным вектором скорости при изменяющейся его численной величине?[2]

Вопрос 2. [3 балла] За каждую секунду кролик перемещается на половину расстояния, остающегося между его носом и пучком салата. Достигнет ли он когда-нибудь этого пучка? Каково предельное значение его средней скорости?

Вопрос 3. [2 балла] Идет отвесный дождь. Скорость капель u. По асфальту со скоростью V скользит мяч. Во сколько раз за один и тот же промежуток времени на него попадет больше капель, чем на такой же, но неподвижный мяч? Изменится ли ответ если мяч не круглый?

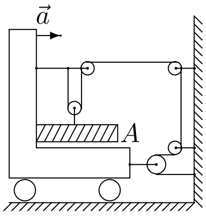

Рис. 13.1

Вопрос 4. [6 баллов] Определить величину и направление ускорения груза A в системе, показанной на рис. 13.1, при условии, что тележка движется с горизонтальным ускорением a, а нить натянута и ее отрезки между блоками либо вертикальны, либо горизонтальны.

Вопрос 5. [1 балл] Может ли человек, находясь на движущемся эскалаторе, быть в покое в системе отсчета, связанной с землей?

Вопрос 6. [3 балла] С поверхности Земли брошено вертикально вверх тело со скоростью $v_0 = 14,7\,\text{м/с}$. В какой момент времени величина мгновенной скорости совпадает со средней скоростью? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Вопрос 7. [3 балла] Парашютист, прыгая с самолета, некоторое время падает не раскрывая парашюта, а затем его раскрывает.

[2] Во всех задачах, где это не оговорено особо, сопротивлением воздуха при движении тел можно пренебречь.

Начертить приблизительные графики скорости v и ускорения a парашютиста.

Вопрос 8. [2 балла] Круглая горизонтальная платформа вращается вокруг своей оси, как показано на рис. 13.2. На платформе стоит наблюдатель A, на земле наблюдатель B, причем OB вдвое больше OA. В момент времени, когда наблюдатель A занимает указанное положение, он движется на наблюдателя B со скоростью 1 м/с. С какой скоростью движется в этот момент наблюдатель B относительно наблюдателя A?

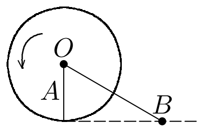

Рис. 13.2

Вопрос 9. [3 балла] Может ли спортсмен на водных лыжах двигаться быстрее (медленнее) катера, буксирующего спортсмена?

Вопрос 10. [4 балла] Колесо радиуса R начинает катиться без проскальзывания с постоянным ускорением $\vec{a}$ относительно земли (см. рис. 13.3) Определить величину ускорения точек B и C к моменту времени t.

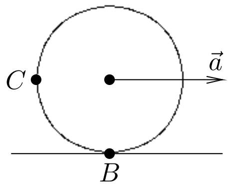

Рис. 13.3

14. Задачи

Задача 1. [5 баллов] Из пожарного шланга струя воды должна попасть в горящее окно, находящееся на высоте $h = 10$ м. Расстояние от шланга до основания здания $L = 10$ м. С какой минимальной начальной скоростью $\vec{v}_0$ и под каким углом α к горизонту необходимо направить струю, чтобы она достигла горящего окна?

Задача 2. [4 балла] Два человека перекидываются мячом двигаясь одновременно с этим навстречу друг другу. Найти путь, который пролетел мяч за время, в течение которого расстояние между людьми сократилось от l_1 до l_2. Скорость первого человека v_1, скорость второго – v_2, скорость мяча – v_3. Временем пребывания мяча в руках пренебречь, полет мяча считать горизонтальным.

Задача 3. [5 баллов] Шар вращается вокруг вертикального диаметра с угловой скоростью ω. По горизонтальной прямой, проходящей через центр шара, к нему приближается точка со скоростью

v. Найти скорость этой точки относительно шара, когда расстояние между центром шара и точкой будет равно L.

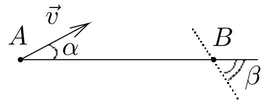

Рис. 14.1

Задача 4. [7 баллов] Тонкая палочка AB длиной ℓ движется в плоскости чертежа (см. рис. 14.1) так, что в данный момент скорость её конца A равна v и направлена под углом α к палочке, а скорость точки B направлена под углом β. Найти точку на палочке, скорость которой направлена вдоль палочки и определить величину скорости этой точки.

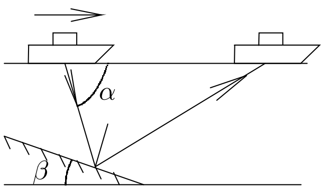

Рис. 14.2

Задача 5. [9 баллов] Скоростной катер, удаляющийся от берега со скоростью $\vec{v}$, проводит исследование морского дна методом ультразвуковой локации, посылая короткие ультразвуковые сигналы в направлении, составляющем угол α с поверхностью моря. При достижении дна ультразвуковой сигнал отражается от него под тем же углом, что и падает. Пренебрегая рассеянием, определите угол наклона дна β, если отражённый сигнал достигает катера. Скорость звука c в воде считать известной.

Задача 6. [10 баллов] Луч света, пройдя через отверстие в плоском экране перпендикулярно его поверхности, попадает на вращающееся с частотой n об/с зеркало. Расстояние от поверхности экрана до зеркала равно ℓ. Определите скорость перемещения v отражённого светового луча вдоль экрана в точке, расположенной на расстоянии 2ℓ от зеркала.

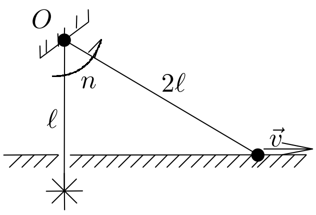

Рис. 14.3

Задача 7. [4 балла] Небольшое тело, находящееся в точке A, начинает двигаться равноускоренно вдоль прямой. Спустя $\Delta t = 5$ с такого движения, тело начинает двигаться равнозамедленно с тем же по величине ускорением. Через какое время после начала движения тело вернется в точку A?

Задача 8. [5 баллов] В наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол $\alpha = 30°$, упруго ударяется шарик, причем направление его скорости v_0 в момент удара составляет с плоскостью угол $\beta = 30°$. На каком расстоянии от места падения он второй раз ударится в плоскость? Определить также величину и направление его скорости после второго соударения.

Задача 9. [5 баллов] Колесо, пробуксовывая, катится по горизонтальной поверхности. При этом максимальная и минимальная скорости точек на его ободе равны $v_{\max} = 7\,\text{м/с}$, $v_{\min} = 1\,\text{м/с}$. Найти величину и направление относительно горизонта векторов скорости точек обода колеса, лежащих на горизонтальном диаметре.

Задача 10. [7 баллов] Длинный шест AB поднимают на крышу сарая, двигая его нижний конец A горизонтально по земле с постоянной скоростью v_0 (см. рис. 14.4).

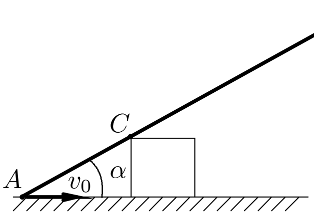

Рис. 14.4

Найдите скорость верхнего конца шеста B в тот момент, когда точка C стержня, отстоящая от нижнего конца (точки A) на $\frac{1}{3}$ его длины, проходит край сарая, а угол α, образуемый шестом с горизонтальной поверхностью, равен 45^o.

Авторы: Турунтаев Сергей Викторович
Составители: Турунтаев Сергей Викторович
Заказ №: 313
Тираж: 50шт.
Оформление и издание: НП РНОЦ "Логос"