Некоммерческое Партнерство
Региональный Научно-Образовательный Центр
"Логос"

Электростатика

2009–2010 учебный год

Ярославль 2010

Оглавление

1. Аннотация

В настоящем пособии обсуждается основной закон взаимодействия электрических зарядов, находящихся в покое относительно друг друга, и основной способ описания явлений, возникающих при этом — посредством электрического поля. Вводится понятие основных характеристик электрического поля и связи между ними (напряжённости и потенциала), предлагаются методы их определения (теорема Гаусса, принцип суперпозиции). Рассматриваются также специфические явления, возникающие при помещении проводников и диэлектриков в электрическое поле и простейшие устройства для накопления электрического заряда – конденсаторы. Все изучаемые вопросы иллюстрируются разбором соответствующих примеров и задач.

Пособие предназначено для учащихся 10–11-х классов.

2. Математический минимум по теме

Необходимо уметь:

1. Производить вычисления с применением векторных величин и их проекций;
2. Применять тригонометрические функции и решать простейшие тригонометрические уравнения;
3. Оперировать с большими и малыми числами.

3. Электрические заряды. Закон Кулона Системы единиц

Электрический заряд, наряду с массой и энергией является неотъемлемым свойством, присущим некоторым “простейшим"частицам материи, так называемым “элементарным"частицам. Из известных в настоящее время элементарных частиц электрическим зарядом обладают электроны, позитроны, протоны, антипротоны, некоторые мезоны и гипероны. Известно **только два** рода электрических зарядов, условно называемых **положительными** и **отрицательными**.

Многочисленными опытами установлено, что абсолютная величина заряда **всех заряженных элементарных частиц одинакова** и равна $4,8 \cdot 10^{-10}$ ед.СГСЭ $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Этот ***минимальный*** электрический заряд (положительный или отрицательный) называется ***элементарным зарядом***. Любой заряд q состоит из **целого** числа элементарных зарядов: $q = eN$, где e — абсолютная величина элементарного заряда; N — любое целое положительное число $(1, 2, \ldots)$. Изменение любого заряда может происходить только скачком на величину одного или нескольких элементарных зарядов.

Практически, однако, заряд q обычно содержит большое число элементарных зарядов (его называют ***макроскопическим***). Изменение такого заряда можно считать (и практически всегда считается) непрерывным, так как элементарный заряд по сравнению с ним весьма мал. Электрический заряд **неотделим** от частиц, свойством которых и является. Неуничтожимость материи влечет за собой **неуничтожимость электрического заряда**. К известным из механики законам сохранения массы, импульса и энергии следует поэтому добавить и ***закон сохранения заряда***:

В замкнутой системе тел или частиц алгебраическая сумма зарядов есть величина постоянная, какие бы ни происходили в системе процессы.

Все элементарные заряженные частицы всегда находятся в состоянии движения. Рассматриваемые в электростатике “неподвижные"заряды есть результат макроскопического усреднения: если геометрическая сумма скоростей всех элементарных зарядов, образующих данный макроскопический заряд q, в среднем равна нулю, то такой заряд проявляет себя в окружающем пространстве как "неподвижный".

Заряды, имеющиеся в телах, принято называть **свободными**, если заряженные частицы могут перемещаться по всему объёму тела, и **связанными**, если они прочно связаны со своими атомами и молекулами.

В 1785 г. французский военный инженер Шарль Огюстен Кулон установил на опыте ***закон взаимодействия электрических зарядов***: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов направлена вдоль линии, соединяющей оба заряда, прямо пропорциональна величинам зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. Если обозначить силу взаимодействия через F, величины зарядов через q_1 и q_2, а расстояние между ними через r, то математически закон Кулона записывается следующим образом:

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, \tag{3.1}$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

В системе СГСЭ единица заряда устанавливается из закона Кулона, поэтому естественно принять $k = 1$. Тогда ***абсолютной электростатической единицей заряда*** называют такой заряд, который действует на равный ему заряд, расположенный на расстоянии 1 см в вакууме, с силой в 1 дину[1]. Систему единиц, в которой за основные единицы приняты сантиметр, грамм, секунда и в которой заряд измеряется в абсолютных электростатических единицах, называют системой СГСЭ.

Закон Кулона в системе СГСЭ в вакууме имеет вид:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}; \tag{3.2}$$

В системе СИ единица заряда — кулон — устанавливается из других закономерностей. Введение единицы заряда в системе СИ независимо от закона Кулона приводит к тому, что в формуле (3.1) сохраняется размерный коэффициент пропорциональности k.

Подставив в формулу (3.1) силу в ньютонах, заряды q_1 и q_2 в кулонах и расстояние r в метрах, можно вычислить k:

$$\frac{k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2.}$$

Таким образом, при вычислении силы взаимодействия зарядов в системе СИ можно пользоваться формулой (3.1), понимая под $k = 9 \cdot 10^9\,\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$. Однако чаще этот коэффициент записывают в другом виде. Связано это вот с чем. Было замечено, что во многие практически важные формулы электродинамики входит множитель 4π, делающий расчеты неудобными. Чтобы избавиться от этого множителя в наиболее важных формулах, англичанин О. Хэвисайд предложил ввести его искусственно в закон Кулона, представив коэффициент пропорциональности k в виде произведения двух сомножителей

[1]Дина - сила, которая массе в 1 г сообщает ускорение в 1 см/с^2 иначе $=$ 105 Дин.

— безразмерного $\frac{1}{4\pi}$ и размерного $\frac{1}{\varepsilon_0}$:

$$k = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \tag{3.3}$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/Н $\cdot$ м^2 — новый коэффициент пропорциональности, называемый ***электрической постоянной***.

Введение в закон Кулона вместо коэффициента k равного ему коэффициента $1/4\pi\varepsilon_0$ видоизменяет все формулы электростатики; из наиболее употребительных формул множитель 4π исчезает (в результате сокращения), и это делает формулы более простыми (правда, в других формулах он появится, что приводит к усложнению их вида). “Исправленные"указанным образом формулы называются ***рационализованными***, а система единиц, построенная на использовании рационализованных формул — ***рационализованной***. Таковой является система СИ, которой Вы привыкли пользоваться. Закон Кулона для взаимодействия зарядов в вакууме в системе СИ примет вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \tag{3.4}$$

4. Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Силовые линии

При изучении взаимодействия электрических зарядов возникает вопрос, почему появляются силы, действующие на заряды, и как они передаются от одного заряда к другому; происходят ли какие-либо изменения в окружающем пространстве при наличии только одного заряда?

Для понимания происхождения и передачи сил, действующих между покоящимися зарядами, допускают наличие между зарядами некой физической материи, осуществляющей это взаимодействие и получившей название электрического поля. Каждой точке электрического поля можно приписать две характеристики: силовую и энергетическую. Силовую характеристику электрического поля называют ***напряжённостью***.

Возьмем точечный электрический заряд величины q_1. Пусть в электрическое поле этого заряда вносится другой точечный заряд q.

Сила F, с которой заряд q_1 действует на заряд q, различная в различных точках поля и зависит, согласно закону Кулона $F = kq_1 \cdot q/r^2$, не только от расстояния между зарядами, но и от величины вносимого заряда q. Однако отношение силы, действующей на заряд q, к величине этого заряда $F/q = kq_1/r^2$ уже не зависит от его величины и характеризуется только зарядом q_1 и расстоянием между зарядом и данной точкой. Так как сила есть векторная величина, а электрический заряд — скаляр, то напряжённость поля, получаемая от деления вектора на скаляр, есть векторная величина. Направление этого вектора определяется направлением силы, действующей на положительный заряд, помещённый в данную точку поля. Напряжённость электрического поля принято обозначать буквой $\vec{E}$. Таким образом, напряжённость электрического поля $\vec{E}$ есть отношение силы $\vec{F}$, действующей на заряд q, к величине этого заряда.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \ .$$

Для того, чтобы описать электрическое поле количественно, нужно задать вектор напряжённости $\vec{E}$ электрического поля в каждой точке пространства. Часто такое описание выполняют графически с помощью силовых линий.

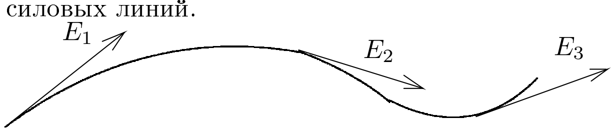


Рис. 4.1

Силовой линией, или линией напряжённости электрического поля, называют такую линию, проведенную в электрическом поле, для которой направление касательной в любой точке совпадает с направлением вектора напряжённости электрического поля (см. рис. 4.1).

Поскольку при определении понятия напряжённости электрического поля за положительное направление вектора принято направление силы, действующей на положительный заряд, помещённый в поле, условились считать, что силовые линии поля, начинаясь на положительных зарядах, направлены к отрицательным зарядам.

На рис. 4.2 в качестве примера даны картины силовых линий уединенных точечных зарядов (положительного и отрицательного). Картина силовых линий строится так, чтобы она отражала реальное распределение напряжённости поля в пространстве, окружающем заряд. Напряжённость поля точечного заряда убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда и направлена по радиусу, соединяющему данную точку поля с зарядом. Если провести N прямых линий, выходящих из точки, где находится заряд, как указано на рис. 4.2, то полное число линий, пересекающих любую сферу с центром в точке нахождения заряда, будет одним и тем же. На единицу площади поверхности сферы радиуса r будет приходиться $N/4\pi r^2$ силовых линий, если линии проведены так, чтобы точки пересечения их с поверхностью сферы радиуса r были расположены на одинаковых расстояниях друг от друга. Густота силовых линий (величина $N/4\pi r^2$) убывает при этом обратно пропорционально квадрату расстояния, то есть так же, как и напряжённость поля точечного заряда. Направление, указанное на силовой линии, показывает, в какую сторону действует электрическое поле на помещённый в данную точку пространства положительный заряд. Именно поэтому говорят, что силовые линии из положительного заряда выходят, а в отрицательный заряд входят.

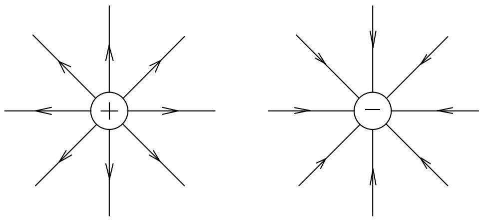


Рис. 4.2

5. Работа в электрическом поле и разность потенциалов

При перемещении электрического заряда в поле совершается работа. Электростатическое поле обладает очень важным свойством: работа по перемещению заряда из одной точки поля в другую не зависит от вида траектории. Это позволяет ввести еще одну характеристику поля — ***напряжение*** или ***разность потенциалов***.

Напряжение между двумя точками поля равно работе, совершаемой электрическим полем по перемещению заряда из одной точки поля в другую, отнесенной к величине этого заряда: $U = A/q$. В отличие от напряжённости, определенной в отдельно взятой точке, напряжение характеризует две точки поля. Если одну из точек выбрать за начало отсчета, то любая точка поля будет иметь определенное напряжение по отношению к выбранной точке. Это напряжение называют ***потенциалом*** φ. Обычно нулевой потенциал приписывают точке, бесконечно удаленной от зарядов, создающих поле. В этом случае под потенциалом φ некоторой точки понимают работу, совершаемую электрическим полем по перемещению единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность.

Потенциал — это энергетическая характеристика электрического поля. Как энергия или работа — напряжение и потенциал — величины скалярные. Иногда удобнее задавать скалярную величину — потенциал φ, чем векторную величину — напряжённость $\vec{E}$. Естественно, что эти две величины должны быть связаны между собой. Ограничимся рассмотрением этой связи на простом примере для ***однородного поля***, то есть такого поля, в каждой точке которого вектор $\vec{E}$ имеет одинаковое значение. Силовые линии такого поля представляют собой параллельные прямые, находящиеся на одном и том же расстоянии друг от друга (см. рис. 5.1).

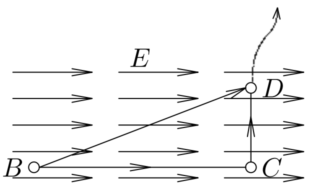


Рис. 5.1

Найдем разность потенциалов между точками B и D. Потенциал φ_B точки B равен работе по перемещению единичного заряда из этой точки в бесконечность. Форма траектории при подсчете работы не имеет значения, поэтому будем перемещать заряд сначала по отрезку BC, потом по отрезку CD, а затем из точки D в бесконечность. Сила, действующая на единицу заряда со стороны электрического поля, равна напряжённости. На отрезке BC работа этой силы равна $E\ell$, где E — проекция вектора напряжённости на силовую линию, а ℓ — длина отрезка BC. На участке CD сила работы не совершает, так как она перпендикулярна перемещению. Наконец, работа по перемещению единичного заряда из точки D в бесконечность равна потенциалу φ_D. Поэтому

$$\varphi_B = E\ell + \varphi_D,$$

или для разности потенциалов

$$\varphi_B - \varphi_D = E\ell. \tag{5.5}$$

Для того чтобы формула (5.5) давала правильный знак разности потенциалов, величине ℓ можно приписать определенный знак в зависимости от расположения точек B и C на силовой линии. Будем считать, что ℓ — это проекция вектора $\overrightarrow{BD}$ на направление силовой линии. Тогда знак положителен, если точка лежит “ниже"по силовой линии, чем точка B, и отрицателен в противоположном случае. Для примера, изображенного на рис. 5.1, $\ell > 0$ и $\varphi_B - \varphi_D > 0$, что соответствует убыванию потенциала вдоль силовой линии ($\varphi_D < \varphi_B$). Другой удобный способ правильного учета знака разности потенциалов — записать выражение (5.5) в виде

$$\varphi_B - \varphi_D = E \cdot BD \cdot \cos\alpha = E_{BD} \cdot BD, \tag{5.6}$$

где α — угол между векторами $\overrightarrow{BD}$ и $\vec{E}$, а E_{BD} — проекция вектора $\vec{E}$ на направление вектора $\overrightarrow{BD}$.

Итак, в однородном электрическом поле между напряжённостью и напряжением (разностью потенциалов) имеется простая связь, даваемая формулами (5.5) или (5.6).

Поверхность, во всех точках которой потенциал электрического поля имеет одинаковые значения, называется ***эквипотенциальной*** поверхностью. Разность потенциалов между любыми двумя точками эквипотенциальной поверхности равна нулю, а это означает, что работа по перемещению заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю. Отсюда следует, что напряжённость электрического поля (как сила, действующая на единичный заряд) всегда перпендикулярна эквипотенциальной поверхности.

В заключение параграфа приведем формулы для определения потенциала и напряжённости электрического поля в вакууме, создаваемого точечным зарядом q:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}; \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

При этом за начало отсчета потенциала выбрана бесконечно удаленная точка ($\varphi_\infty = 0$).

6. Принцип суперпозиции

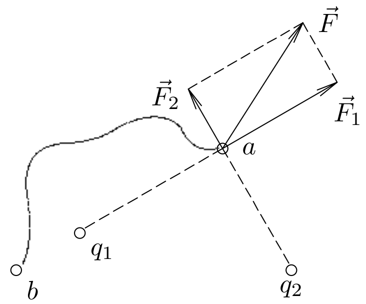


Рис. 6.1

Если в электрическое поле, создаваемое двумя точечными зарядами q_1 и q_2 (см. рис. 6.1), внести заряд q, то опыт показывает, что сила $\vec{F}$ электрического поля, действующая на заряд q, равна сумме сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, с которой каждый из зарядов q_1 и q_2 действует в отсутствии другого на заряд q. Из этого опытного факта следует правило векторного сложения напряжённостей электрических полей. Действительно, если для электрического поля суммы зарядов сохранить определение напряжённости $\vec{E} = \vec{F}/q$, то из равенства $\vec{F}/q = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)/q$ следует

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \ ,$$

так как $\vec{F}_1/q$ есть напряжённость поля $\vec{E}_1$, создаваемая зарядом q_1, а $\vec{F}_2/q$ — напряжённость поля $\vec{E}_2$, создаваемая зарядом q_2.

Пусть под действием электрического поля заряд q перейдет из точки a в точку b. Сила $\vec{F}$ совершит при этом над зарядом некоторую работу A. Так как $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то при перемещении заряда q из точки a в точку b каждая из сил совершит над этим зарядом работу, и суммарная работа A будет равна сумме работ A_1 и A_2, совершенной каждым из зарядов q_1 и q_2 в отдельности, то есть $A = A_1 + A_2$.

Сохраняя для определения разности потенциалов поля, создаваемого суммой зарядов, то же выражение $U = \frac{A}{q}$, какое было введено для точечного заряда, находим, что

$$U = \frac{A}{q} = \frac{A_1}{q} + \frac{A_2}{q}$$

или

$$U = U_1 + U_2 \ ,$$

где $U_1 = A_1/q$ — разность потенциалов между точками a и b, в электрическом поле, созданном зарядом q_1 в отсутствии заряда q_2, а $U_2 = A_2/q$ — разность потенциалов между точками a и b, созданная зарядом q_2 в отсутствии заряда q_1. Если обозначить через φ суммарный потенциал электрического поля , созданного зарядами q_1 и q_2, а через φ_1 и φ_2 — потенциалы полей, созданных порознь зарядами q_1 и q_2, то можно записать

$$\varphi_a - \varphi_b = \varphi_{1a} - \varphi_{1b} + \varphi_{2a} - \varphi_{2b},$$

или

$$\varphi_a - \varphi_b = (\varphi_{1a} + \varphi_{2a}) - (\varphi_{1b} + \varphi_{2b}),$$

где $\varphi_a - \varphi_b = U, \varphi_{1a} - \varphi_{1b} = U_1, \varphi_{2a} - \varphi_{2b} = U_2$.

Таким образом, чтобы найти потенциал электрического поля φ, созданного зарядами q_1 и q_2, надо найти потенциалы φ_1 и φ_2 каждого из зарядов в отдельности и полученные потенциалы сложить, то есть $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Правило сложения напряжённостей электрических полей и потенциалов называют ***принципом суперпозиции*** (или наложения) электрических полей. Оно представляет важное свойство электрического поля. Принцип суперпозиции справедлив, разумеется, не только для двух, но и для скольких угодно зарядов.

7. Теорема Гаусса и распределенные заряды

В принципе напряжённость электрического поля, создаваемого данным распределением зарядов, всегда можно вычислить с помощью закона Кулона. Полное электрическое поле в любой точке является векторной суммой вкладов всех зарядов. Однако, за исключением самых простых случаев, вычислить эту сумму крайне сложно.

В ряде случаев напряжённость электрического поля, создаваемого данным распределением зарядов, удается рассчитать гораздо проще и изящнее, пользуясь теоремой Гаусса. Ценность теоремы Гаусса состоит еще и в том, что она позволяет глубже понять природу электростатического поля и устанавливает более общую связь между зарядом и полем.

Прежде чем переходить собственно к теореме Гаусса, необходимо ввести понятие потока.

7.1. Поток напряжённости электрического поля

Рассмотрим площадку S, которую пронизывают силовые линии однородного электрического поля напряжённостью $\vec{E}$ (см. рис. 7.1).

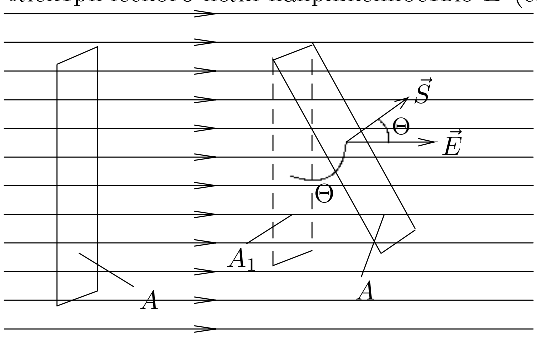


Рис. 7.1

Площадка может иметь форму прямоугольника (как на рисунке), круга или любую другую. Если напряжённость электрического поля перпендикулярна площадке, то ***поток напряжённости*** через нее определяется как

$$\Phi = E \cdot S.$$

Если площадка S не перпендикулярна $\vec{E}$, а составляет с $\vec{E}$ некоторый угол Θ (см. рис. 7.1 б), то её будет пронизывать меньше силовых линий. В этом случае поток напряжённости через площадку будет определяться формулой:

$$\Phi = E \cdot S_{\perp} = ES\cos\Theta\ ,$$

где $S_{\perp}$ — проекция площадки S на плоскость, перпендикулярную $\vec{E}$. Площадку S можно представить вектором $\vec{S}$, направленным перпендикулярно её поверхности, а по величине равным площади A (см. рис. 7.1 б).

Тогда Θ — угол между $\vec{E}$ и $\vec{S}$, и поток напряжённости можно записать в виде скалярного произведения двух векторов: $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$. Поток напряжённости допускает и наглядное истолкование, основанное на понятии силовых линий. В п. 4, отмечалось, что число силовых линий, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную полю ($N/4\pi r^2$), пропорционально напряжённости поля. В нашем случае $N/S \sim E$. Следовательно, $N \sim ES = \Phi$, то есть поток напряжённости поля через площадку пропорционален числу силовых линий, пересекающих её поверхность. Рассмотрим теперь более общий случай, когда электрическое поле $\vec{E}$ неоднородно, а поверхность не плоская (см. рис. 7.2). Разобьем эту поверхность на n элементов, площади которых обозначим $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots \Delta S_n$.

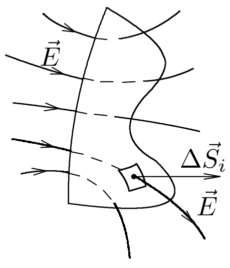


Рис. 7.2

Разбиение должно быть таким, чтобы можно было считать: 1) каждый элемент ΔS_i плоским и 2) электрическое поле $\vec{E}_i$ в пределах элемента однородным. Тогда поток напряжённости через всю поверхность будет суммой:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i \ ,$$

где значок $\sum\limits_{i=1}$ означает суммирование потоков через все элементы разбиения поверхности:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2 + \ldots + \vec{E}_n \cdot \Delta\vec{S}_n,$$

где $\vec{E}_i$ — напряжённость поля, отвечающая элементу $\Delta\vec{S}_i$.

До сих пор мы не учитывали существование неоднозначности в выборе вектора $\vec{S}$; например, на рис. 7.1 вектор $\vec{S}$ может быть направлен как вправо вверх, так и влево вниз — в любом случае он будет перпендикулярен поверхности. В случае замкнутой поверхности условились направлять вектор $\vec{S}$ (или $\Delta\vec{S}$) наружу из ограниченного поверхностью объёма (см. рис. 7.3).

Для силовой линии, выходящей из объёма (справа на рис. 7.3), угол Θ между $\vec{E}$ и $\Delta\vec{S}$ меньше $\pi/2$ и $\cos\Theta > 0$; для линии, входящей в объём (слева на рис. 7.3), угол $\Theta > \pi/2$ и $\cos\Theta < 0$. Соответственно поток, входящий в замкнутый обьём, отрицателен $\left(\sum E\cos\Theta\Delta S < 0\right)$, а поток, выходящий из объёма, положителен.

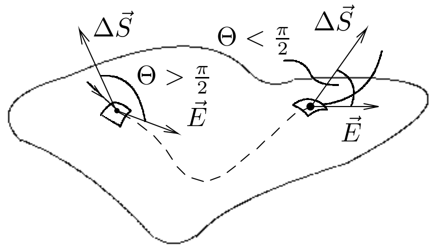


Рис. 7.3

На рис. 7.4 число силовых линий электростатического поля, входящих в объём, равно числу выходящих линий. Потому $\Phi = 0$: результирующий поток через поверхность равен нулю. Поток $\sum\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}$ отличен от нуля только в том случае, когда какое-то число силовых линий начинается или заканчивается внутри замкнутой поверхности. А поскольку силовые линии могут начинаться или заканчиваться только на электрических зарядах, поток будет отличен от нуля лишь в том случае, когда суммарный заряд внутри поверхности не равен нулю.

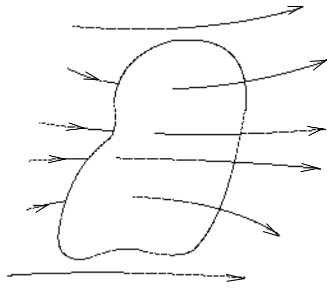


Рис. 7.4

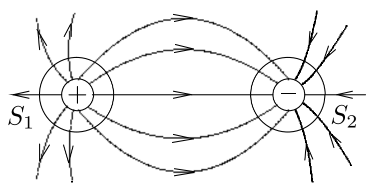


Рис. 7.5

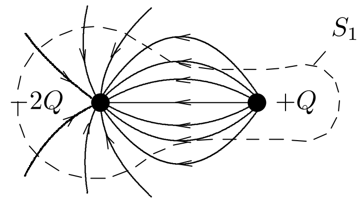


Рис. 7.6

Например, поверхность S_1 на рис. 7.5 окружает положительный заряд, и поток напряжённости электрического поля через эту поверхность направлен наружу ($\Phi > 0$); внутри поверхности S_2 заключен такой же отрицательный заряд, и поток направлен внутрь этой поверхности ($\Phi < 0$).

Для конфигурации, показанной на рис. 7.6, поток через поверхность отрицателен (подсчитайте число силовых линий!). Поток Φ зависит от заряда, и именно в этом состоит суть теоремы Гаусса.

7.2. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса устанавливает точное соотношение между потоком напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность и суммарным зарядом Q внутри этой поверхности.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

где ε_0 — та же константа (электрическая постоянная), что и в законе Кулона. Следует подчеркнуть, что Q — это заряд, заключенный внутри той замкнутой поверхности, через которую вычисляется поток напряжённости $\sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$. При этом несущественно, как именно распределен заряд Q внутри поверхности; **заряды вне поверхности не учитываются**. (Внешний заряд может повлиять на расположение силовых линий, но не на алгебраическую сумму линий, входящих внутрь поверхности и выходящих наружу.) Покажем теперь, что закон Кулона следует из теоремы Гаусса. Рассмотрим уединенный точечный заряд Q. Теорема Гаусса справедлива для произвольной замкнутой поверхности. Выберем поэтому такую поверхность, с которой удобнее всего иметь дело, а именно, симметричную поверхность сферы радиусом r, в центре которой находится наш заряд Q (см. рис. 7.7).

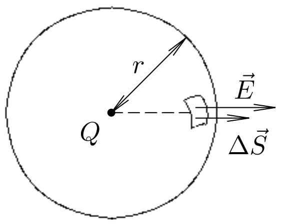


Рис. 7.7

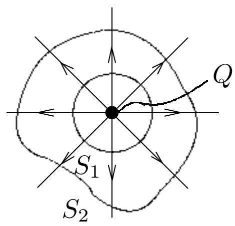


Рис. 7.8

Поскольку сфера (конечно, воображаемая) симметрична относительно заряда, расположенного в её центре, напряжённость электрического поля $\vec{E}$ должна иметь одно и то же значение в любой точке сферы; кроме того, вектор $\vec{E}$ всюду направлен наружу (или всюду внутрь) параллельно вектору $\Delta\vec{S}$ элемента поверхности. Тогда равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = Q/\varepsilon_0$ принимает вид:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \sum_{i=1}^{n} E_i \cdot \Delta S_i = E \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = E \cdot 4\pi r^2.$$

Отсюда находим $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, то есть получаем по сути закон Кулона.

Теперь об обратном. В общем случае теорему Гаусса нельзя вывести из закона Кулона: теорема Гаусса является более общим утверждением, нежели закон Кулона. Однако для нескольких частных случаев теорему Гаусса удается получить из закона Кулона; используем общие рассуждения относительно силовых линий.

Рассмотрим сначала точечный уединенный заряд, окруженный сферической поверхностью (см. рис. 7.7). Согласно закону Кулона напряжённость электрического поля в точке на поверхности сферы равна $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Проделав в обратном порядке аналогичные рассуждения, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} E_i \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \Delta S_i =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Что можно теперь сказать, если поверхность имеет неправильную форму, например S_2 на рис. 7.8? Через эту поверхность проходит то же число силовых линий, что и через сферу S_1, но поскольку поток напряжённости через поверхность, как мы видели в разделе 7.1, пропорционален числу проходящих через нее силовых линий, поток через S_2 равен потоку через S_1 :

$$\sum_{A_1} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \sum_{A_2} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \ .$$

Наконец, рассмотрим случай, когда внутри поверхности находится не единственный заряд. Для каждого заряда в отдельности

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{S}_j = \frac{Q_j}{\varepsilon_0} \ .$$

Поскольку полная напряжённость электрического поля $\vec{E}$ в силу принципа суперпозиции есть сумма напряжённостей, обусловленных отдельными зарядами, $\vec{E} = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{E}_k$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{E}_k \right) \cdot \Delta\vec{S}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{Q_j}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

где $Q = \sum\limits_{j=1}^{m} Q_j$ — суммарный заряд, заключенный внутри поверхности.

Эти простые рассуждения показывают, что теорема Гаусса справедлива для любого распределения электрических зарядов внутри любой замкнутой поверхности. Следует иметь ввиду, однако, что поле $\vec{E}$ не обязательно обусловлено только зарядами Q, которые находятся внутри поверхности. Например, на рис. 7.4 электрическое поле $\vec{E}$ существует во всех точках поверхности, однако оно создается вовсе не зарядом внутри поверхности (Q=0). Теорема Гаусса утверждает, что если поток напряжённости электрического поля, направленный внутрь поверхности, не равен потоку, направленному наружу, то это обусловлено наличием зарядов внутри поверхности. Теорема Гаусса справедлива для любого векторного поля, величина которого обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника. Для полей другого типа она не будет выполняться. Пусть, например, поле точечного заряда убывает как $k\frac{Q}{r}$; тогда поток через сферу радиуса r определяется выражением

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = k\frac{Q}{r} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k Q \cdot r \ .$$

Чем больше радиус сферы, тем больше поток, несмотря на то, что заряд внутри сферы остается постоянным.

7.3. Применение теоремы Гаусса

Теорема Гаусса позволяет рассчитывать напряжённость электрического поля в тех случаях, когда распределение зарядов оказывается достаточно простым и симметричным. В качестве примеров определим поле равномерно заряженной сферы и бесконечной заряженной плоскости[2].

7.3.1. Равномерно заряженная сферическая оболочка

Пусть по тонкой сферической оболочке радиусом r_0 равномерно распределен заряд Q (см. рис. 7.9). Определим напряжённость электрического поля а) вне оболочки, б) внутри оболочки.

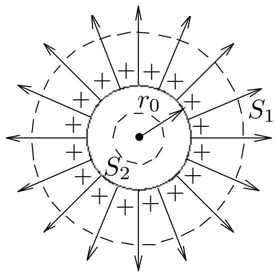


Рис. 7.9

а) Поскольку заряд распределен симметрично, электрическое поле так же должно быть симметричным. Оно должно быть направлено вдоль радиуса сферы к поверхности ($Q < 0$) или от нее ($Q > 0$) и зависеть только от расстояния r от центра. (Все точки на сфере радиуса r совершенно одинаковы в смысле суперпозиции полей от всех участков заряженной поверхности). Напряжённость поля будет, таким образом, одинакова во всех точках воображаемой сферы радиусом r, концентричной с оболочкой (S_1 на рис. 7.9). Поскольку напряжённость $\vec{E}$ перпендикулярна поверхности (направлена по радиусу), теорема Гаусса дает:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i = \sum_{i=1}^{n} E_i \cdot \Delta S_i = E \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \ ;$$

Откуда

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

[2]Практическая рекомендация: при решении задач такого сорта необходимо выбирать поверхность, через которую определяется поток так, чтобы напряжённость электрического поля E была постоянна по всей поверхности или на определенных её участках.

Таким образом, поле снаружи равномерно заряженной сферической оболочки имеет такую же напряжённость, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре сферы.

б) Внутри оболочки поле также должно быть симметричным; поэтому напряжённость поля E должна иметь одно и то же значение во всех точках сферической поверхности S_2 (см. рис. 7.9), концентричной с оболочкой. Согласно теореме Гаусса

$$\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot \Delta S_i = E \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = E \cdot 4\pi r^2 = 0 \ ;$$

поскольку заряд внутри воображаемой поверхности S_2 равен 0. Итак, $E = 0$ внутри равномерно заряженной сферы (при $r < r_0$). Так как напряжённость внутри сферы равна нулю, то и сила, действующая на любой заряд внутри равномерно заряженной сферы, равна нулю. Нулю будет равна работа по перемещению заряда внутри заряженной сферы из одной точки в другую, и, следовательно, нулем будет и разность потенциалов между этими точками, то есть потенциал во всех точках сферы один и тот же. Графики зависимости напряжённости E и потенциала φ от расстояния r от центра сферы изображены на рис. 7.10.

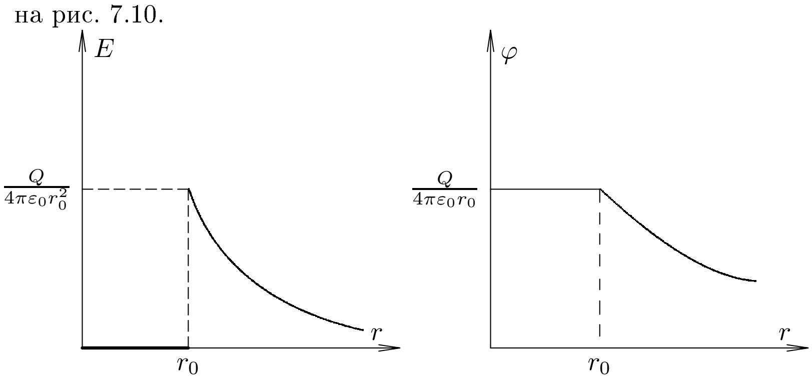


Рис. 7.10

Поскольку напряжённость поля вне заряженной сферы такая же как напряжённость поля такого же по величине точечного заряда, помещенного в центр сферы (то есть поле вне сферы совпадает с полем точечного заряда в центре сферы), то и распределение потенциала вне заряженной сферы должно быть таким же, как у точечного заряда такой же величины (то есть вне заряженной сферы $\varphi = Q/4\pi\varepsilon_0 r$).

7.3.2. Бесконечная заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда σ

Заряд, приходящийся на единицу какой-либо заряженной поверхности, называют поверхностной плотностью заряда и обозначают греческой буквой σ.

Определим напряжённость электростатического поля в любой точке пространства, окружающего такую заряженную плоскость. Выберем произвольную точку A, расположенную вне плоскости (см. рис. 7.11).

В силу опять-таки симметрии в распределении заряда, можно утверждать, что напряжённость электрического поля в любой точке, находящейся на одинаковом расстоянии от плоскости, будет одинаковой по величине и направленной всегда перпендикулярно плоскости (в силу бесконечности плоскости все эти точки оказываются совершенно равноправными в смысле суперпозиции полей, создаваемых каждым заряженным участком).

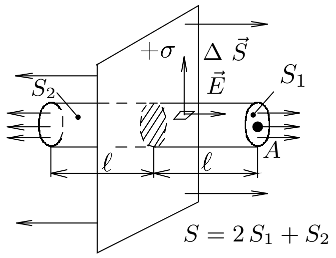


Рис. 7.11

Выберем замкнутую поверхность в виде цилиндра S, как это указано на рис. 7.11, и подсчитаем поток через такую поверхность. Весь поток можно разбить на две части: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 — поток через днища цилиндра, Φ_2 — поток через его боковую поверхность.

$$\Phi_1 = 2\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = 2\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot \Delta S_i = 2E\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = 2E \cdot S_1 \ ,$$

где S_1 — площадь днища цилиндра. Цифра “2"появляется потому, что потоки через днища справа и слева от заряженной плоскости одинаковы.

$$\Phi_2 = \sum_{S_2} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \sum E \cdot \Delta S \cdot \cos(\widehat{\vec{E}, \Delta\vec{S}}) = 0,$$

так как линии напряжённости скользят вдоль боковой поверхности, не пересекая её (угол между вектором площадки и вектором напряжённости $\vec{E}$ поля равен 90^o).

Итак, суммарный поток через так выбранную поверхность $\Phi = 2ES_1$. По теореме Гаусса $\Phi = Q/\varepsilon_0 = \sigma \cdot S_1/\varepsilon_0 = 2ES_1$, так как заряд внутри цилиндрической поверхности $Q = \sigma \cdot S_1$, откуда $E = \sigma/2\varepsilon_0$.

Результат, который мы получили, свидетельствует о том, что напряжённость электрического поля равномерно заряженной бесконечной плоскости во всех точках пространства одинакова. Графически электрическое поле пластин с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и $-\sigma$ изображено на рис. 7.12.

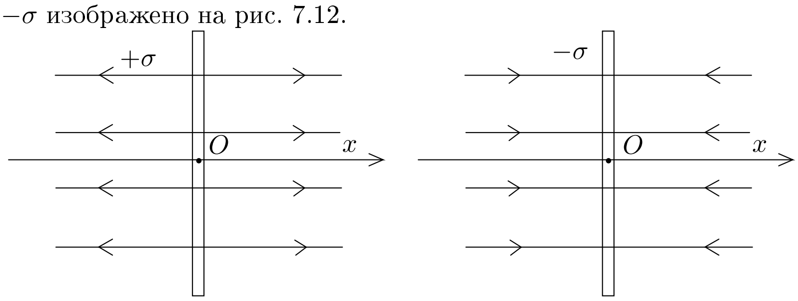


Рис. 7.12

Если через x обозначить координату оси, перпендикулярную плоскости (см. рис. 7.12), то потенциал φ при $x > 0$ определится выражением

$$\varphi(x) = \varphi_0 - Ex = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

для положительно заряженной плоскости и

$$\varphi(x) = \varphi_0 + Ex = \varphi_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

для отрицательно заряженной плоскости согласно (5.5).

При $x < 0$ для положительно заряженной плоскости

$$\varphi(x) = \varphi_0 + Ex = \varphi_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x,$$

для отрицательно заряженной плоскости

$$\varphi(x) = \varphi_0 - Ex = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x.$$

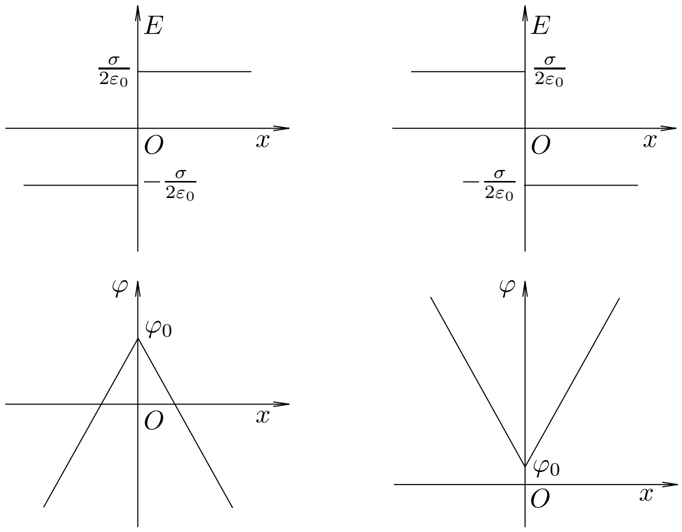
Здесь φ_0 — потенциал в точке $x = 0$ (заряженная плоскость расположена в начале координат).

Эти соотношения несложно получить, используя определение разности потенциалов. Действительно, перемещая вдоль силовой линии положительный заряд q из начала координат в точку с координатой x, электрическое поле положительно заряженной плоскости при $x > 0$ совершит работу

$$A = qEx = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}x,$$

а электрическое поле отрицательно заряженной плоскости при $x > 0$ совершит работу

$$A = q(-E)x = -\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}x.$$



а) б)

Рис. 7.13

Для отрицательных значений x электрическое поле положительно заряженной плоскости совершит работу

$$A = q(-E)x = -\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}x,$$

а электрическое поле отрицательно заряженной плоскости совершит работу

$$A = qEx = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}x.$$

Вспоминая, что $\varphi_0 - \varphi(x) = A/q$, получаем приведенные выше выражения. Графики E и φ от координаты x для положительно заряженной плоскости приведены на рис. 7.13 а), а для отрицательно заряженной плоскости на рис. 7.13 б).

Отметим, что бесконечных плоскостей в природе не существует. Для равномерно заряженных плоскостей конечных размеров можно пользоваться формулами для вычисления напряжённости и потенциалов поля только вблизи “центра"плоскости вдали от ее краев и на расстояниях от плоскости, много меньших ее характерных размеров (длины и ширины).

Пример 1. Две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) равномерно заряжены. Заряд внутренней сферы положительный и равен q, заряд внешней сферы отрицательный и равен $-Q$. Нарисуйте графики напряжённости E и потенциала φ в зависимости от расстояния r до центра сфер. Величина $q < Q$, но $Q/R_2 < q/R_1$.

Решение. Воспользуемся принципом суперпозиции для полей и потенциалов. Для каждого из зарядов в отдельности нарисуем графики напряжённости полей и потенциалов в зависимости от расстояния до центра сферы. Для заряда q рис. 7.14, для заряда $-Q$ рис. 7.15. Произведя сложение графиков, получаем искомые графики (см. рис. 7.16). Графическое сложение удобно выполнять по точкам, складывая для одного и того же значения r ординаты соответствующих графиков.

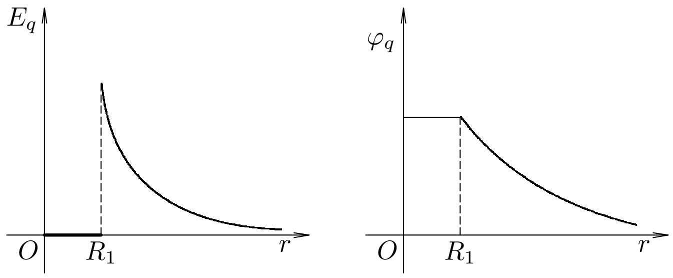


Рис. 7.14

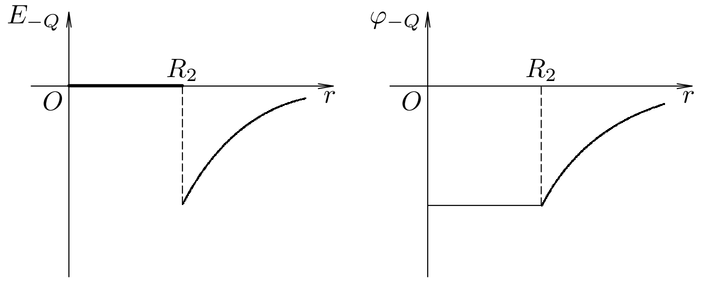


Рис. 7.15

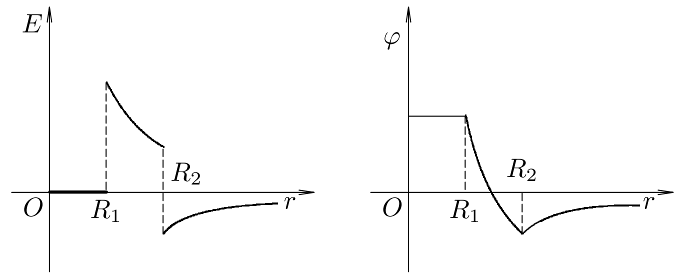


Рис. 7.16

Задачу можно решить и по-другому, написав явные выражения для напряжённости E и φ в различных областях пространства.

Для точек пространства, удалённых от центра сферы на расстояние $r \geq R_2$, напряжённость поля и потенциал определяются выражениями:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \ ,$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q-Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \ .$$

Здесь использован принцип суперпозиции. Для точек пространства, расположенных между сферами ($R_1 < r < R_2$), напряжённости поля и потенциал определяются выражениями:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \ , \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \ .$$

Здесь учтено, что заряд $-Q$ для точек пространства $R_1 < r < R_2$ создаст суммарную напряжённость, равную нулю, а потенциал такой же, как и на поверхности внешней сферы.

Внутри меньшей сферы при $r < R_1$ напряжённость поля во всех точках равна нулю, а потенциал постоянный и равный $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 R_1 - Q/4\pi\varepsilon_0 R_2$.▲

8. Электрическое поле в веществе

По своим электрическим свойствам все вещества делятся на ***проводники*** и непроводники, или ***диэлектрики***.

Главным отличием проводников от диэлектриков является существование в проводниках свободных электрических зарядов. Как правило — это электроны.

В диэлектриках свободных зарядов пренебрежимо мало. Если в 1 см^3 металла содержится около $10^{22} - 10^{23}$ свободных электронов, то в диэлектриках свободных электронов менее 10^3 в см^3.

8.1. Проводники в электрическом поле

Необходимым условием электростатического равновесия проводника является равенство нулю напряжённости электрического поля внутри проводника. Если бы внутри проводника существовало электрическое поле, то свободные заряды (электроны) пришли бы в движение, то есть равновесие было бы нарушено. Условие $\vec{E} = 0$ должно быть выполнено для всех точек внутри проводника независимо от того заряжен он сам или помещен в электрическое поле.

Условие отсутствия электростатического поля внутри проводника приводит к тому, что нескомпенсированные заряды могут располагаться только на его поверхности. В этом можно убедиться с помощью теоремы Гаусса.

Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объём внутри проводника. Во всех точках этой поверхности напряжённость электрического поля равна нулю. Следовательно, равен нулю и поток напряжённости поля через эту поверхность. Тогда по теореме Гаусса равен нулю и полный заряд в объёме, ограниченном рассматриваемой поверхностью. Так как поверхность произвольна, то результат применим к любому участку внутри проводника вплоть до границы. Значит, нескомпенсированные заряды могут располагаться только на поверхности проводника.

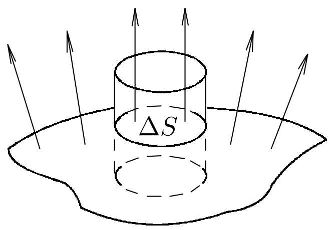


Рис. 8.1

С помощью теоремы Гаусса легко найти выражение для напряжённости электрического поля в непосредственной близости от поверхности проводника.

Прежде всего заметим, что потенциал всех точек проводника одинаков (иначе свободные электроны должны двигаться!), а линии напряжённости перпендикулярны его поверхности.

Возьмем на поверхности проводника настолько малый участок ΔS, чтобы его можно было считать плоским, а поверхностную плотность заряда σ — постоянной. Проведем мысленно малую замкнутую цилиндрическую поверхность, образующие которой перпендикулярны к поверхности проводника, а основания параллельны ΔS (см. рис. 8.1). Нижнее основание расположено целиком внутри проводника, где поле отсутствует, а верхнее — в непосредственной близости от поверхности проводника, где силовые линии еще перпендикулярны к ней.

При таком выборе замкнутой поверхности поток напряжённости проходит только через верхнее основание и равен $E\Delta S$. По теореме Гаусса $E\Delta S = \sigma\Delta S/\varepsilon_0$, откуда

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{8.7}$$

Подчеркнем, что формула (8.7) дает выражение для напряжённости полного электростатического поля, существующего вблизи поверхности проводника, независимо от того, создается ли это поле только самим заряженным проводником или еще и другими зарядами. Из рис. 8.1 видно, что напряжённость результирующего поля вблизи поверхности проводника связана только с плотностью зарядов на его поверхности.

Пример 2. Металлическая сфера равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ. Определить силу, действующую на каждый элемент поверхности dS.

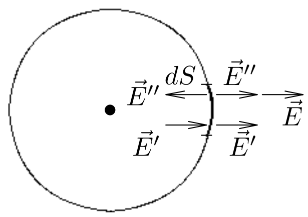


Рис. 8.2

Решение. Выделим на сфере участок площадью dS. Силу, с которой заряженная поверхность будет действовать на заряд, находящийся на элементарной площадке dS, определим как $dF = E'dq = E' \cdot \sigma \cdot dS$, где E' — напряжённость, электрического поля, создаваемого на участке dS всей заряженной поверхностью за исключением самой заряженной площадки dS.

С другой стороны, напряжённость вблизи сферы $E = \sigma/\varepsilon_0$ складывается из напряжённости электрического поля заряда площадки dS и напряжённости поля в этой точке E', создаваемого всей остальной заряженной поверхностью, причем внутри металлической поверхности электрическое поле отсутствует. В свою очередь заряженную площадку dS при приближении к ней на расстояния, много меньше $\sqrt{dS}$, можно рассматривать как бесконечно заряженную плоскость, и, следовательно, напряжённость поля, создаваемого практически на поверхности по обе стороны от площадки, равно $E'' = \sigma/2\varepsilon_0$.

Поскольку внутри $E = 0 \Rightarrow E' - \sigma/2\varepsilon_0 = 0$, и на поверхности $E' + \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$, получаем для напряжённости поля всей шаровой поверхности, кроме площадки dS в точках на этой площадке $E' = \sigma/2\varepsilon_0$ и сила, действующая на каждый элемент dS, $dF = \sigma/2\varepsilon_0 \cdot \sigma dS = \sigma^2 dS/2\varepsilon_0$. Направлена сила по радиусу от центра.

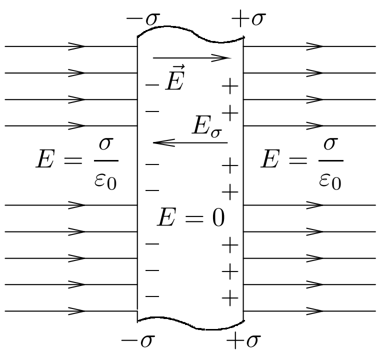


Рис. 8.3

Если поместить в однородное электрическое поле металлическую пластину так, чтобы её поверхность была перпендикулярна силовым линиям поля (см. рис. 8.3), то под действием сил поля заряды внутри металла перераспределятся и на противоположных поверхностях пластин появятся заряды с поверхностной плотностью $+\sigma$ и $-\sigma$.

Суммарная напряжённость поля этих зарядов внутри пластины равна по величине и противоположна по направлению внешнему полю E.

Таким образом, напряжённость внешнего поля $E = \sigma/2\varepsilon_0 + \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$ и внутри пластины суммарная напряжённость поля равна нулю.▲

8.2. Диэлектрики в электрическом поле

В отличие от проводников свободных электронов в диэлектриках мало, и основную роль играют связанные заряды, входящие в состав нейтральных атомов и молекул.

Вспомним, что атомы состоят из положительно заряженного ядра, окруженного “облаком"отрицательно заряженных электронов. Ядро и электроны создают электрическое поле. Это поле совпадает с полем двух точечных зарядов, равных по величине и противоположных по знаку. Координаты этих точечных зарядов принято называть центрами положительного и отрицательного зарядов атома. Аналогично вводятся центры положительного и отрицательного заряда молекулы. Вообще такая система двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов Q, расположенных на малом расстоянии ℓ друг от друга (в сравнении с расстоянием до точки, в которой определяется поле) получила название ***диполя***. Величина $p = Q\ell$ называется дипольным моментом.

Дипольным моментом обладают многие молекулы, например, двухатомная молекула CO, или молекула воды H_2O.

Такие молекулы, у которых центры зарядов не совпадают, называются ***полярными***. На диполь с моментом $p = Q \cdot \ell$, помещённый в однородное электрическое поле напряжённостью $\vec{E}$, действует вращающий момент, стремящийся повернуть диполь так, чтобы он расположился вдоль силовых линий поля (см. рис. 8.4.)

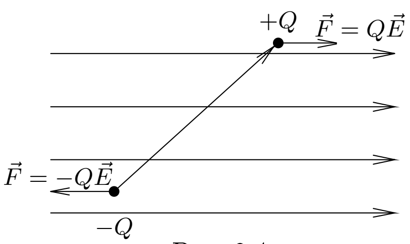


Рис. 8.4

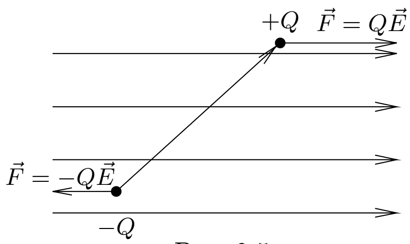


Рис. 8.5

Если электрическое поле неоднородно, то силы действующие на положительный и отрицательный заряды диполя, могут оказаться неодинаковыми по величине, и тогда на диполь, кроме вращающего момента, будет действовать еще и результирующая сила (см. рис. 8.5).

Если молекулы вещества изначально неполярны, то дипольный момент может возникнуть под действием электрического поля.

В зависимости от величины напряжённости поля большая или меньшая часть молекул располагается вдоль силовых линий. На рис. 8.6, 8.7 изображено схематическое расположение молекул в отсутствии поля (см. рис. 8.6) и в сильном электрическом поле (см. рис. 8.7). Следствием этого упорядочения в расположении молекул является то, что на поверхности AA_1 и BB_1 диэлектрика образуются равные по величине, но противоположные по знаку электрические заряды (см. рис. 8.7). Диэлектрик, как принято говорить, поляризуется. Причина ослабления поля в диэлектрике и заключается в его поляризации. Действительно, поместим между разноименно заряженными металлическими пластинами, расположенными параллельно, пластину из диэлектрика[3] (см. рис. 8.8).

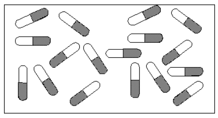


Рис. 8.6

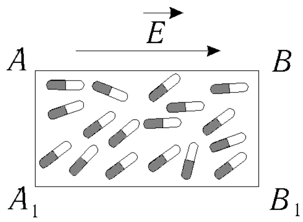


Рис. 8.7

Пусть заряды на металлических пластинах имеют одну и ту же абсолютную величину. Так как разноименные заряды притягиваются, на левой стороне диэлектрической пластины появятся отрицательные заряды, а на правой — положительные. Суммарное поле внутри диэлектрика складывается из поля E_0, созданного зарядами на металле, и поля E_p, созданного поляризационными зарядами на боковых поверхностях диэлектрика. Так как эти поля направлены в разные стороны (см. рис. 8.8), их суммарное поле меньше поля, создаваемого зарядами металлических пластин.

[3] Диэлектрик на рисунке заштрихован.

Если внутри диэлектрика поместить точечные заряды, то сила электрического взаимодействия уменьшается и определяется выражением:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, показывающая, во сколько раз сила взаимодействия точечных зарядов в диэлектрике меньше силы их взаимодействия в вакууме.

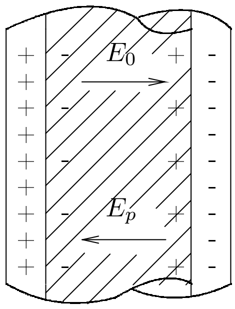


Рис. 8.8

Обратим внимание, что в этой формуле предполагается, что оба заряда находятся в одном и том же диэлектрике, а сам диэлектрик заполняет все пространство. Попытка использовать эту формулу без соблюдения указанных предположений будет приводить к неверным результатам.

9. Конденсаторы

Устройство для накопления зарядов получило название ***конденсатора***. Типичный плоский конденсатор представляет собой пару металлических пластин (обкладок), заряженных с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и $-\sigma$, расположенных параллельно друг другу на расстоянии $d \ll \sqrt{S}$, где S — площадь пластин (см. рис. 9.1).

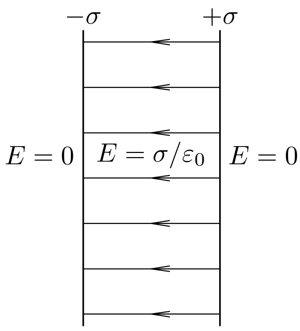


Рис. 9.1

Модули напряжённостей полей внутри плоского конденсатора складываются, а вне — вычитаются. Поэтому абсолютная величина напряжённости поля E внутри конденсатора

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ ,$$

а вне конденсатора $E = E_1 - E_2 = 0$, где E_1 и E_2 — абсолютные значения напряжённостей полей, создаваемых плоскостями с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и $-\sigma$:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ , \qquad\qquad E_2 = \frac{|-\sigma|}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ .$$

Суммарное поле плоского конденсатора изображено на рис. 9.1.

Под ***емкостью конденсатора*** понимают отношение заряда конденсатора к модулю разности потенциалов между его обкладками. Рассмотрим подробнее, что понимают под зарядом конденсатора. Заряжая конденсатор, мы сообщаем заряды его обкладкам. При этом под зарядом обкладок нужно понимать заряды, расположенные только на внутренних, обращенных друг к другу поверхностях этих обкладок. Эти заряды равны по модулю и противоположны по знаку, а абсолютная величина любого из них называется ***зарядом конденсатора***. Чтобы подчеркнуть различие между тем, что называют ***зарядом конденсатора***, и ***полным зарядом обкладок***, рассмотрим следующий пример.

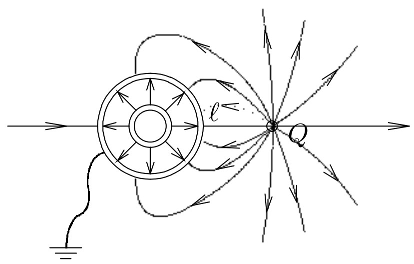


Рис. 9.2

Пример 3. Пусть наружная обкладка сферического конденсатора заземлена, а внутренней сообщен заряд q. Весь этот заряд равномерно распределится по внешней поверхности внутренней обкладки. Тогда на внутренней поверхности наружной сферы индуцируется заряд $-q$, и, следовательно, заряд конденсатора равен q. А что будет на внешней поверхности наружной сферы?

Решение: Это зависит от того, что окружает конденсатор. Пусть например, на расстоянии ℓ от поверхности внешней сферы находится точечный заряд Q (см. рис. 9.2). Этот заряд никак не повлияет на электрическое состояние внутреннего пространства конденсатора, т. е. на поле между его обкладками.

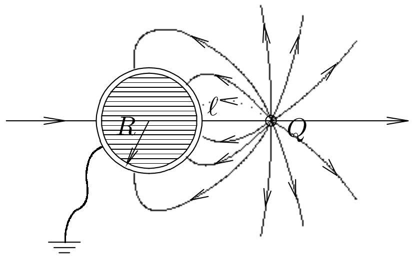


Рис. 9.3

В самом деле, внутреннее и внешнее пространства разделены толщей металла наружной обкладки, в которой электрическое поле равно нулю. Но характер поля во внешнем пространстве и заряд, индуцированный на наружной поверхности внешней сферы, зависят от величины и положения заряда Q. Это поле будет точно таким же, как и в случае, когда заряд Q находится на расстоянии ℓ от поверхности сплошного заземленного металлического шара, радиус которого равен радиусу внешней сферы конденсатора (9.3). Таким же будет и индуцированный заряд. Для нахождения его будем рассуждать следующим образом. Электрическое поле в любой точке пространства создается зарядом Q и зарядом, индуцированным на поверхности шара, который распределен там, разумеется, неравномерно — как раз так, чтобы обратилась в нуль результирующая напряжённость поля внутри шара. Согласно принципу суперпозиции потенциал в любой точке можно искать в виде суммы потенциалов полей, создаваемых точечным зарядом Q и точечными зарядами, на которые можно разбить распределенный по поверхности шара индуцированный заряд.

Поскольку все элементарные заряды Δq_i, на которые разбит индуцированный на поверхности шара заряд Q', находятся на одинаковом расстоянии R от центра шара, то потенциал создаваемого им поля в центре шара будет равен:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\sum_{i=1}^{n}\Delta q_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R}.$$

Тогда полный потенциал в центре заземленного шара равен:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q'}{R} + \frac{Q}{R+\ell}\right) = 0,$$

откуда

$$Q' = -Q\frac{R}{R+\ell}.$$

Знак минус отражает тот факт, что индуцированный заряд всегда противоположного знака.

Итак, мы видим, что заряд на наружной поверхности внешней сферы конденсатора определяется окружением, в котором находится конденсатор, и не имеет никакого отношения к заряду конденсатора q. Полный заряд внешней обкладки конденсатора, разумеется, равен сумме зарядов её внешней и внутренней поверхностей, однако заряд конденсатора определяется только зарядом внутренней поверхности этой обкладки, который связан линиями напряжённости поля с зарядом внутренней обкладки.▲

10. Рекомендуемая литература

1. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1989.

2. Джанколи Д. Физика, т.2 — М.: Мир, 1989.

3. Физика — 10 класс, под ред. Пинского А.А., М.: Просвещение, 1994.

Книга [1] занимает промежуточное положение между учебником физики и сборником задач. Авторы уделяют большое внимание "обратной"связи между разбираемыми задачами и физическими законами — каждая из рассматриваемых задач является поводом для глубокого (иногда и совсем краткого) разговора о сути физических явлений и законов. На примере некоторых разбираемых задач показано, к каким ошибкам и парадоксам можно прийти при формальном применении фундаментальных физических законов.

Содержание книги [2] охватывает практически все разделы курса физики, а уровень изложения занимает промежуточное положение между школьной и вузовской программами. Завершая изложение многих разделов, автор предлагает читателю поразмыслить над тем, что означают обсуждаемые результаты и как можно качественно объяснить их особенности. Особую ценность книге придает насыщенность иллюстративным материалом, а также большое количество разобранных примеров и задач.

Учебник [3] предназначен для учащихся школ и классов с углубленным изучением физики и математики. Изложение материала построено традиционно, причем в курсе 10 класса авторы постарались избежать введения бесконечно малых и производных, ограничиваясь малыми приращениями. Учебник снабжен большим количеством задач и экспериментальных лабораторных работ с изложением правил оценки погрешности измерений.

11. Основные формулы по теме

1. Сила взаимодействия точечных зарядов:

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

   где в системе СИ

$$k = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2};$$

   в рационализованной системе единиц

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

2. Напряжённость электрического поля точечного заряда:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

3. Напряжённость электрического поля на поверхности проводника:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

4. Потенциал электрического поля точечного заряда:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

5. Поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную поверхность:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i.$$

6. Теорема Гаусса:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_0}.$$

7. Емкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{U}.$$

12. Вопросы

Вопрос 1. [1 балл] Почему линии напряжённости электрического поля образуют с проводящей поверхностью прямые углы?

Вопрос 2. [2 балла] Правильно ли утверждение, что силовые линии — это траектории, по которым двигался бы в электростатическом поле точечный положительный заряд, внесённый в поле и предоставленный самому себе?

Вопрос 3. [2 балла] Какова методика расчёта напряжённости электростатического поля на основе теоремы Гаусса?

Вопрос 4. [4 балла] В пространство между разноименно заряженными обкладками конденсатора вставляется металлическая пластина. Изменятся ли заряды, наведённые на пластине, если пространство внутри конденсатора заполнить керосином?

Вопрос 5. [2 балла] Из равномерно заряженного тонкого кольца радиуса R с линейной плотностью заряда λ вырезан малый участок, длина которого $\sigma << R$. Чему равна напряженность в центре кольца?

Вопрос 6. [3 балла] α – частица проходит геометрический центр молекулы водорода, двигаясь перпендикулярно к линии, соединяющей оба протона. В какой точке на α – частицу действует максимальная сила? Считайте, что протоны мало смещаются при движении α – частицы и что электрическим полем электронов можно пренебречь.

Вопрос 7. [2 балла] Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле напряженностью E, перпендикулярном пластинам. Площадь пластин конденсатора S. Какой заряд окажется на каждой пластине, если конденсатор замкнуть проводником накоротко?

Вопрос 8. [2 балла] Полый металлический шар A, имеющий небольшое отверстие, заряжен положительно. Как известно, на внутренней поверхности этого шара заряды отсутствуют. Зарядится ли шар B, если соединить его проволокой с внутренней поверхностью шара A?

Вопрос 9. [2 балла] Последовательно соединенные конденсаторы с емкостями C и $2C$ подключены к источнику с напряжением U. Во сколько раз изменится суммарная энергия конденсаторов, если их соединить параллельно и присоединить к тому же источнику?

Вопрос 10. [1 балл] Как объяснить ослабление силы взаимодействия между заряженными телами в диэлектрике по сравнению с силой взаимодействия между этими же телами в вакууме?

13. Задачи

Задача 1. [6 баллов] По направлению к первоначально неподвижному ядру атома гелия движется протон. На какое наименьшее расстояние протон сможет приблизиться к ядру, если на очень большом расстоянии от ядра скорость протона $v_0 = 10^4$ м/с? Заряд протона $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m_p = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг, зарядовое число гелия $Z = 2$. Массу ядра атома гелия можно считать равной $4m_p$.

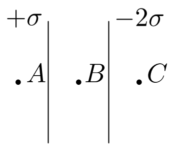


Рис. 13.1

Задача 2. [5 баллов] Определить напряжённость электрического поля двух бесконечных параллельных плоских пластин, заряженных с поверхностной плотностью заряда σ и -2σ в точках A, B и C (см. рис. 13.1).

Задача 3. [5 баллов] По двум сторонам равностороннего треугольника равномерно распределены одинаковые заряды так, что в центре треугольника электрическое поле имеет напряжённость $\vec{E}$ и потенциал φ. Как изменяется напряжённость и потенциал в этой точке, если одну из заряженных сторон убрать?

Задача 4. [4 балла] Два металлических шара радиусами $R_1 = 2\,\text{см}$ и $R_2 = 6\,\text{см}$ соединены проводник ом, ёмкостью которого можно пренебречь. Шарам сообщен заряд $q = 1\,\text{нКл}$. Какова поверхностная плотность зарядов на шарах?

Задача 5. [3 балла] Сфера радиуса R имеет заряд Q. Чему равен потенциал поля в центре сферы? Как зависит потенциал в центре сферы от распределения зарядов на сфере? Как зависит потенциал поля на поверхности сферы от распределения зарядов по сфере?

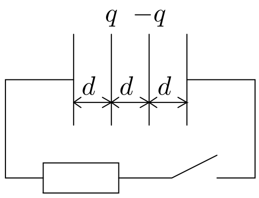


Рис. 13.2

Задача 6. [7 баллов] В схеме на рис. 13.2 две внутренние металлические пластины заряжены зарядами q и $-q$ соответственно. Две внешние вначале незаряженные, металлические пластины соединяют через резистор. Какой заряд пройдет через резистор? Расстояние между пластинами d, площадь каждой пластины S.

Задача 7. [5 баллов] Потенциал внутренней сферы радиуса r равен нулю (сфера заземлена). Потенциал внешней сферы радиуса $2r$ равен φ. Определите заряды сфер. Центры сфер совпадают.

Задача 8. [4 балла] Четыре одинаковые заряженные частицы, каждая массой 5г и зарядом $2{\cdot}10^{-6}$Кл, поместили в вершинах квадрата со стороной 5см. Затем частицы одновременно освободили. Найдите максимальное значение скорости частиц.

Задача 9. [4 балла] Три проводящих пластины расположены друг относительно друга, как показано на рис. 13.3. Внутренняя пластина заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10^{-8}$Кл/м^2. Как распределится этот заряд по обеим сторонам пластины, если внешние пластины замкнуть с помощью ключа K?

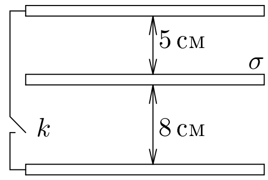


Рис. 13.3

Задача 10. [6 баллов] Для того, чтобы увеличить расстояние между пластинами заряженного плоского конденсатора в два раза, необходимо совершить работу A. Какую работу потребуется совершить, чтобы заполнить пространство между пластинами исходного конденсатора диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε?

Авторы: Турунтаев Сергей Викторович
Составители: Турунтаев Сергей Викторович
Заказ №: 319
Тираж: 50шт.
Оформление и издание: НП РНОЦ "Логос"