Элементы геометрии гладких многообразий (I): производные Ли и их приложения

С.С.Кокарев, РНОЦ Логос (Ярославль), ИИГКСГФ (Москва)

Аннотация

В лекциях систематически излагаются основы теории гладких многообразий, необходимые для обоснования аппарата производных Ли. В качестве приложений этого аппарата рассмотрены иллюстративные примеры из геометрической теории дифференциальных уравнений и техника отыскания изометрий и конформных симметрий на примере псевдоевклидовых и некоторых простых римановых метрик. Особое внимание уделяется подробному исследованию изометрий однородных финслеровых кубических метрик и их инвариантной классификации.

Elements of geometry of smooth manifolds (I): Lie derivatives and its applications

S.S.Kokarev, RSEC Logos (Yaroslavl), RIHCSGP (Moscow)

Abstract

Some basic elements of smooth manifolds theory, which are necessary for Lie derivative apparatus foundations, are systematically presented. General formalism is illustrated by application to some simple examples of geometrical theory of differential equations, technique of finding of isometries and conformal symmetries for pseudoeuclidean some simple riemannian spaces. Special attention is devoted to the investigation of cubic finslerian metrics and their invariant classifying.

1. Введение и обозначения

Со времени создания общей теории относительности (1915) идея геометрического описания законов природы получила мощный импульс для своего развития и послужила основанием для формулировки и разработки подавляющего большинства современных физико-геометрических концепций и теорий [1, 2]. В современной геометрии общей основой всех геометрических построений является понятие *многообразия*, которое представляет собой глубокое обобщение наших представлений о поверхностях, пространстве и времени [3]. В физике многообразия наделяются дополнительными структурами, отвечающими за основные свойства пространства, времени и материи. При этом физические величины описываются *тензорными полями* на многообразии.

Одним из фундаментальных свойств окружающего нас мира является явная или скрытая *симметрия* его законов. С одной стороны, принципы симметрии помогают нам формулировать эти законы, с другой — они являются ключом к точному аналитическому исследованию уравнений, выражающих эти законы. Общепринятым (хотя, конечно, далеко не исчерпывающим) математическим понятием, отвечающим за описание симметрии, является понятие *группы* [4]. Элементами группы симметрий в физике являются такие преобразования физической системы, которые оставляют ее, в определенном смысле, неизменной. К примеру все воображаемые движения твердого стержня, при которых остается неизменной его длина, образуют *группу 3-мерных вращений,* состоящую из параллельных переносов, собственных вращений и инверсий. При этом первые два типа преобразований относятся к числу *непрерывных симметрий*, поскольку такие преобразования могут быть осуществлены путем непрерывного изменения параметров преобразования (углов и параметров трансляций), начиная от их нулевых значений (т.е. тождественного преобразования). Преобразования инверсии представляют пример *дискретных преобразований.* Соединение идеи непрерывной симметрии с идеей многообразия приводит к одному из центральных понятий современной физики и математики — *группы Ли.* Многообразие группы Ли состоит из точек, которые можно интерпретировать как преобразования, а кривые на этом многообразии являются геометрическим образом однопараметрических семейств преобразований.

Когда мы хотим математически выразить факт постоянства некоторой физической величины F во времени, мы записываем условие этого постоянства в виде:

$$\frac{dF}{dt} = 0 \tag{1}$$

— равенства нулю производной по времени от этой величины. Когда мы хотим выразить постоянство этой величины в пространстве, мы записываем условие этого постоянства в аналогичном виде:

$$\frac{dF}{dx} = 0 \tag{2}$$

и т.д. В физике и геометрии часто возникают ситуации, когда физические или геометрические величины (тензоры) не остаются постоянными в пространстве и (или) во времени, но остаются постоянными при смещении вдоль некоторого особого семейства кривых на многообразии положений. Именно такую ситуацию мы и называем в физике *непрерывной симметрией физической* или геометрической величины. Надлежащее обобщение формул (1)-(2) реализуется с помощью общей конструкции *производной Ли*, определение которой не связано с существованием каких-либо дополнительных структур на многообразии, кроме общей структуры гладкости (см. след. раздел). При этом производная Ли согласована с тензорной алгеброй на многообразии: производная Ли от тензора является тензором того же типа.

Целью настоящих лекций является введение в аппарат производных Ли и небольшой обзор его применений в геометрии и физике, нацеленный на начальное ознакомление. Основное внимание в лекциях уделяется геометрическим аспектам производной Ли и ее конкретным приложениям в геометрии и физике, в то время как теоретико-групповые вопросы обсуждаются лишь в общих чертах. Везде, где это возможно и уместно, предпочтение отдается безкоординатным определениям и формулировкам. Иногда на первых этапах это требует несколько больших усилий в процессе освоения материала, но эти усилия "окупаются" общностью формулировок и четким выделением инвариантных геометрических аспектов определяемых объектов и конструкций. Среди приложений относительно большой объем в лекциях занимает исследование изометрий финслеровых кубических метрик. Этот вопрос весьма слабо освещен в доступной литературе. Кроме того, общий контекст Школы-2009, на которой часть этих лекций озвучивалась автором у доски, подразумевал популяризацию идей финслеровой геометрии и ее приложений к физическим проблемам.

Лекции представляют достаточно замкнутое и систематическое введение и обоснование производной Ли и ряда ее приложений. Вместе с тем, ряд важных вопросов (исчисление внешних форм и теория связности на многообразии, "взаимодействие" внешнего дифференцирования и ковариантной производной с производной Ли и ряд других) остается за пределами лекций из соображений компромисса между объемом и строгостью изложения. Эти разделы выносятся в следующие части лекций. Читатель, заинтересованный в более полном изложении, может обратиться к множеству классических руководств и монографий [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

На протяжении всех лекций мы принимаем следующую систему обозначений:

R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство;

$\partial_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ — оператор частного дифференцирования по переменной x^i;

$f \circ g$ — композиция отображений g и f (первым действует отображение справа);

id — тождественное отображение.

$\{a_i\}_{i=1,\dots,n}$ — множество занумерованных объектов a_i, где индекс i пробегает все значения от 1 до n.

$T_p = T|_p = T(p)$ — эквивалентные способы обозначения геометрического объекта (тензора T) в точке p.

(T) — матрица компонент объекта T.

Везде, где это не оговаривается особо, принято правило сокращенного суммирования Эйнштейна по повторяющимся верхним и нижним индексам.

Остальные обозначения поясняются непосредственно в тексте.

Рубленым шрифтом набраны основные определения, *наклонным "италиком"* — основные термины и формулировки выводов, `машинописным` — формулировки доказываемых утверждений и теорем. Окончание доказательств и примеров отмечается значком $\square$.

Успешное изучение лекций предполагает уверенное знание читателем математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии в объеме стандартного университетского курса [13, 14, 15].

2. Гладкие многообразия

Основная идея, лежащая в определении гладкого многообразия, проста: оно "склеено" из "лоскутков", каждый из которых "похож" на область евклидова пространства некоторого фиксированного (конечного) числа измерений. Чтобы придать точный смысл словам, заключенным в кавычки, перейдем к более строгим определениям.

Рассмотрим некоторое множество $\mathcal{M}$. Пара (U, φ), где U — некоторое открытое[1] подмножество $\mathcal{M}$, а $\varphi\colon U \to D \subset R^m$ — биективное отображение U на некоторое открытое множество (область) D вещественного евклидова пространства R^m, называется *координатной картой* на $\mathcal{M}$. При этом U называется *координатной окрестностью,* φ — *координатным (картирующим) отображением,* а R^m — *арифметизирующим пространством.* Пара карт (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) называется C^r-согласованной, если выполняется одно из двух условий:

1. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$;

2. На непустом пересечении карт $U_{12} = U_1 \cap U_2$ отображения $\psi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon D_1' = \varphi_1(U_{12}) \to D_2' = \varphi_2(U_{12})$ и $\psi_{21} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\colon D_2' \to D_1'$ являются C^r-гладкими отображениями открытых множеств.

Рисунок 2.1 поясняет второй пункт этого определения. Поясним условие C^r гладкости на координатном языке. Пусть $(x^1, \dots x^m) \equiv x$ — система координат на R^m для картирующего отображения φ_1, а $(y^1, \dots, y^m) \equiv y$ — система координат на R^m для картирующего отображения φ_2. Арифметизирующие пространства для картирующих отображений различных карт удобно считать различными. Таким образом, отображение φ_1 каждой точке $p_1 \in U_1$ ставит в со-

[1] Существование открытых подмножеств на $\mathcal{M}$ подразумевает, что $\mathcal{M}$ — топологическое пространство. На самом деле, топологию на $\mathcal{M}$ всегда можно выбрать индуцированной евклидовой топологией на R^m, потребовав, чтобы отображения φ в любой карте были непрерывными. Возможно, что такая точка зрения не является общепринятой и даже логически последовательной, но в настоящих лекциях мы придерживаемся ее из соображений экономии места и времени. Такой же подход используется автором в курсе лекций [6]. Более детальное обсуждение топологических аспектов многообразий можно найти в [16].

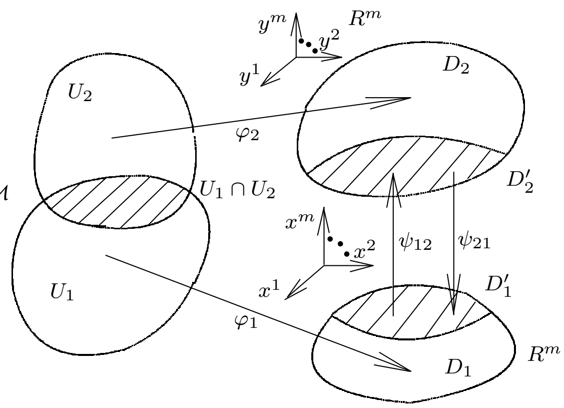

Рис. 2.1: К условию согласования карт

ответствие точку $x_{p_1} = (x^1(p_1), \ldots, x^m(p_1)) \in D_1 \subset R^m$, а отображение φ_2 каждой точке $p_2 \in U_2$ ставит в соответствие точку $y_{p_2} = (y^1(p_2), \ldots, y^m(p_2)) \in D_2 \subset R^m$. Числа $x^i(p_1)$ и $y^i(p_2)$ называются *$i-$ыми координатами точек p_1 и p_2 в координатных картах* (U_1, φ_1) *и* (U_2, φ_2) соответственно. Если пересечение U_{12} непусто, то любая точка q из него будет иметь, как минимум, два координатных представления: $x_q = (x^1(q), \ldots, x^m(q))$ и $y_q = (y^1(q), \ldots, y^m(q))$, которые обязательно будут взаимно-однозначно связаны друг другом, ввиду того, что оба представления порождаются одной и той же точкой и отображения φ_1 и φ_2 являются биекциями. Отображение ψ_{12} (оно называется *функцией перехода из U_1 в U_2*) как раз и является числовой функцией, переводящей координаты x в координаты y для каждой точки из U_{12}, а отображение ψ_{21} осуществляет обратное преобразование y в x. В явном виде эти отображения описываются системами:

$$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^m); \quad x^i = g^i(y^1, \ldots, y^m), \quad (i = 1, \ldots, m).$$

При этом $f^i \equiv \psi_{12}^i$ и $g^i \equiv \psi_{21}^i$ обозначают i-ые компоненты отображений ψ_{12} и ψ_{21} соответственно. Требование C^r гладкости означает, что все функции f^i и g^i имеют непрерывные частные производные вплоть до r-ого порядка включительно.

Атласом $\mathbf{At}(\mathcal{M})$ на множестве $\mathcal{M}$ называется совокупность попарно C^r-согласованных карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, таких, что система координатных окрестностей $\{U_\alpha\}$ образует покрытие множества $\mathcal{M}$: $\mathcal{M} = \cup_\alpha U_\alpha$. Два атласа $\mathbf{At}_1$ и $\mathbf{At}_2$ называются эквивалентными: $\mathbf{At}_1 \sim \mathbf{At}_2$, если любая пара карт из $\mathbf{At}_1$ и $\mathbf{At}_2$ является C^r-согласованной. Говорят, что класс эквивалентных атласов определяет на $\mathcal{M}$ *гладкую структуру* или *гладкость*.

Множество $\mathcal{M}$ с введенной на нем гладкой структурой называется *гладким многообразием*. При этом *размерностью* $\dim\mathcal{M}$ гладкого многообразия называется размерность m арифметизирующего пространства R^m.

Размерность многообразия является его важнейшей характеристикой и иногда ее указывают явно в виде верхнего или нижнего индекса у символа многообразия: например $\mathcal{M}_m$, $\dim\mathcal{M}_m = m$. В настоящих лекциях мы всегда будем иметь дело с многообразиями, у которых гладкость имеет бесконечный порядок: $r = \infty$, и всегда $\dim\mathcal{M} = m$ и $\dim\mathcal{N} = n$, так что для сокращения записи мы не будем указывать размерности абстрактных многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, используемых в конструкциях общего характера.

Происхождение терминов "карта" и "атлас" очевидно. Поверхность Земли мы изображаем посредством совокупности плоских карт, каждая из которых, покрывает определенный участок земной поверхности. Для представления всей поверхности несколько карт объединяются в географический атлас. При этом края некоторых пар карт изображают один и тот же участок Земли и поэтому должны существовать правила, переводящие точки с одной карты на таком участке, на другую карту на нем же и обратно. Теория многообразий заимствует эти идеи из картографии и, абстрагируясь от конкретных особенностей наглядного представления, переносит их на общий случай m-измерений.

Рассмотрим примеры многообразий.

1. Евклидово пространство R^n. Самый простой способ ввести гладкость на R^n заключается в задании одной единственной карты (R^n, id). Она называется *стандартной гладкостью*. Отметим, не углубляясь в детали, что на R^n можно ввести и другие гладкие структуры, неэквивалентные только что введенной нами [17].

2. Комплексное пространство C^n. Представление овеществления: $C^n = R^n + iR^n$ подсказывает, что простейший способ ввести гладкую структуру на C^n заключается в переходе от C^n к R^{2n} и дословному повторению конструкции предыдущего пункта. Такая гладкость, однако, "стирает" всякую информацию о комплексно-алгебраической структуре C^n. Для ее сохранения необходимо обобщить понятие вещественного многообразия на понятие *комплексного многообразия,* у которого роль арифметизирующего пространства выступает C^n, а функции перехода становятся комплексно-аналитическими [10].

3. Линейное вещественное векторное пространство L_n. В любом n-мерном линейном вещественном пространстве можно ввести базис, состоящий из n элементов $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Всякий вектор v представляется в таком базисе в виде линейной комбинации вида $v^1 e_1 + \ldots v^n e_n$, где $\{v^1, \ldots, v^n\}$ — координаты v в выбранном базисе. Таким образом, при некотором фиксированном базисе L_n оказывается изоморфным R^n и, следовательно, допускает структуру n-мерного вещественного гладкого многообразия.

4. Поверхности в R^n. Стандартные определения линии и поверхности в R^3 представляют собой типичные примеры многообразий малой размерности [6]. Не представляет труда обобщить эти определения на поверхности высших размерностей в R^n. При этом, как правило в качестве единственной карты выступает параметризация линий и поверхностей. Следует отметить, что несмотря на общие теоремы о возможности реализации многообразий в виде вложенных поверхностей в объемлющее евклидово пространство достаточно большого числа измерений [6], общая формулировка понятия многообразия никак не связана с такого рода представлениями и изучение свойств многообразия не требует привлечения понятий и структур какой-либо объемлющей геометрии.

4. Сфера S^n. Сфера относится к числу простейших (но нетривиальных!) многообразий. Начнем рассмотрение сфер с простейшего случая $n = 1$ (окружность). Окружность S^1 определяется как подмножество точек плоскости R^2, удовлетворяющих уравнению[2]:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1,$$

где (x^1, x^2) — декартовы координаты на плоскости[3]. Введем следую-

[2]Выбором масштаба длины радиус окружности можно всегда сделать единичным. Сфера произвольного радиуса как многообразие принципиально ничем не отличается от единичной сферы, поэтому в дальнейшем мы для некоторого упрощения будем ограничиваться именно единичной сферой.

[3]Для дальнейшего обобщения конструкции на многомерный случай нам удоб-

щие обозначения:

$$S^1_{i\pm} = \{p \in S^1 | x^i \gtrless 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Атлас сферы S^1 теперь можно задать посредством четырех карт $(S^1_{i\pm}, \varphi_{i\pm})$, где $\varphi_{i\pm} = \pi_i$, а π_i — отображение проекции на прямую $x^i = 0$: $\pi_1(x^1, x^2) = (0, x^2)$, $\pi_2(x^1, x^2) = (x^1, 0)$. При этом координатные окрестности S^1_{i+} и S^1_{i-} не пересекаются, а на не пустых пересечениях $S^1_{1+} \cap S^1_{2+}$, $S^1_{1+} \cap S^1_{2-}$, $S^1_{1-} \cap S^1_{2+}$, $S^1_{1-} \cap S^1_{2-}$, функции перехода имеют, соответсвенно, вид:

$$x^2 = +\sqrt{1 - (x^1)^2}; \quad x^2 = -\sqrt{1 - (x^1)^2};$$

$$x^2 = +\sqrt{1 - (x^1)^2}; \quad x^2 = -\sqrt{1 - (x^1)^2}$$

и обратные к ним (с учетом знаков у корней). Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что эти функции перехода на всех пересечениях гладкие с $r = \infty$. Следовательно S^1 — одномерное гладкое многообразие.

Построенная конструкция элементарно обобщается на случай 2-мерной сферы S^2 — соответствующие конкретные формулы читателю предлагается записать самостоятельно (подсказка: для S^2 мы будем иметь шесть карт). Мы сразу перейдем к построению атласа n-мерной сферы S^n, рассматриваемой как подмногообразие R^{n+1}, задаваемое уравнением:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1.$$

Введем обозначения:

$$S^n_{i\pm} = \{p \in S^1 | x^i \gtrless 0\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Атлас сферы S^n теперь можно задать посредством $2(n+1)$ карт $(S^1_{i\pm}, \varphi_{i\pm})$, где $\varphi_{i\pm} = \pi_i$, а π_i — отображение проекции на гиперплоскость $x^i = 0$:

$$\pi_i(x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, x^2, \ldots, 0, \ldots x^n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

нее перейти от привычного обозначения декартовых координат (x, y) к "безличной" нумерации (x^1, x^2).

При этом координатные окрестности S^n_{i+} и S^n_{i-} не пересекаются, а не пустыми будут пересечения $S^n_{i\pm} \cap S^n_{j\pm}$ при $i \neq j$. Функции перехода, к примеру, для $S^n_{i+} \cap S^n_{j+}$ и $S^n_{i-} \cap S^n_{j+}$ при $1 < i < j < n+1$ имеют вид:

$$x'^1 = x^1, \dots, x'^{i-1} = x^{i-1},$$

$$x'^i = \sqrt{1 - (x^1)^2 - \dots - (x^{i-1})^2 - (x^{i+1})^2 - \dots - (x^{n+1})^2},$$
$$x'^{i+1} = x^{i+1}, \dots, x'^j = x^{j+1}, \quad \dots x'^n = x^{n+1}.$$

Аналогичный вид имеют все остальные функции перехода, а также и обратные к ним. Непосредственной проверкой можно убедиться, что все функции перехода являются гладкими на пересечениях, поэтому S^n — n-мерное гладкое многообразие. Отметим, что с помощью отображения стереографической проекции можно построить более экономные атласы для всех сфер S^n, состоящие при любом n всего из двух карт [6].

Прямые произведения $\mathcal{M}_m \times \mathcal{N}_n$. Напомним, что прямым (или декартовым) произведением $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ двух множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называется множество всевозможных упорядоченных пар, (m, n), где $m \in \mathcal{M}$, а $n \in \mathcal{N}$. Если $\mathcal{M}_m$ и $\mathcal{N}_n$ — гладкие многообразия, то на прямом произведении $\mathcal{M}_m \times \mathcal{N}_n$ гладкость порождается прямым произведением атласов $\mathbf{At}(\mathcal{M}_m) \times \mathbf{At}(\mathcal{N}_n)$, состоящим из всевозможных карт вида $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \chi_\beta)$, где $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathbf{At}(\mathcal{M}_m)$, $(V_\beta, \varphi_\beta) \in \mathbf{At}(\mathcal{N}_n)$. При этом прямое произведение отображений $\varphi_\alpha \times \chi_\beta$ действует по правилу:

$$(\varphi_\alpha \times \chi_\beta)(m, n) = (\varphi_\alpha(m), \chi_\beta(n)),$$

где $m \in \mathcal{M}_m$, $n \in \mathcal{N}_n$, $\varphi_\alpha(m) \in R^m$, $\chi_\beta(n) \in R^n$. Таким образом, прямое произведение двух гладких многообразий — это снова гладкое многообразие[4]. При этом, очевидно, $\dim(\mathcal{M}_m \times \mathcal{N}_n) = m + n$. В качестве примеров многообразий, имеющих структуру прямого произведения гладких многообразий можно привести *тор*: $T^2 = S^1 \times S^1$ и *цилиндр* $\mathrm{Cyl}^2 = R \times S^1$.

[4]Его порядок гладкости определяется как $\min(r_1, r_2)$, где r_1, r_2 — порядки гладкости сомножителей.

3. Скалярные функции и векторные поля

Гладкая структура на многообразии позволяет ввести на нем элементарные геометрические объекты: гладкие скалярные и векторные поля. Поскольку при этом определение вектора на многообразии, вообще говоря, не допускает привычной интерпретации упорядоченной пары точек, нам потребуется ввести ряд новых предварительных понятий и определений, относящихся к некоторым фундаментальным структурам любого гладкого многообразия.

Скалярной функцией на многообразии $\mathcal{M}$ называется отображение $f\colon \mathcal{M} \to R$.

Таким образом, как обычно, скалярная функция f каждой точке $p \in \mathcal{M}$ ставит в соответствие вещественное число $f(p) \in R$. Система координат в каждой карте атласа $\mathbf{At}(\mathcal{M})$ позволяет перейти к координатному представлению функции f, которое в некоторой карте (U, φ) задается по правилу:

$$f_U(p) \equiv f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi)(p) = (f \circ \varphi^{-1})(x_p).$$

Таким образом, всякая скалярная функция на многообразии $\mathcal{M}_m$ задается набором своих координатных компонент $\{f_{U_\alpha}\}_\alpha$, где $f_{U_\alpha}(x_\alpha)$ — компонента в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. При этом скалярная функция f называется *гладкой,* если ее координатные компоненты гладкие в обычном смысле вещественного анализа. Ясно, что порядок гладкости функции, определенный таким образом, не может превышать порядка гладкости многообразия, поскольку только при таком условии этот порядок сохраняется при замене координат на пересечениях карт.

Очевидно, что сумма и произведение любых двух гладких функций на $\mathcal{M}$ являются гладкой функцией на $\mathcal{M}$, поэтому совокупность всех гладких функций на многообразии образуют алгебраическую структуру *кольца*, которое мы будем обозначать $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$.

Прежде, чем перейти к определению вектора и векторного поля на многообразии, сделаем два предварительных замечания. Даже в евклидовом пространстве вектор можно ассоциировать с упорядоченной парой точек только если ограничиться линейными (*аффинными*) преобразованиями координат. При таких преобразованиях разность декартовых (аффинных) координат преобразуется линейно и однородно, как это и требуется для компонент векторов. Нелинейные преобразования (например, переход к цилиндрической системе координат или любой другой криволинейной) нарушает линейность преобразований разности координат, и следовательно обнаруживают ограниченность ее "векторной природы". Для построения "настоящих" векторов, которые являются таковыми независимо от выбора системы координат, мы сделаем следующее полезное наблюдение: с каждым векторным полем v в евклидовом пространстве можно ассоциировать линейный оператор "дифференцирования вдоль v", который на любую скалярную функцию действует по правилу:

$$v(f) \equiv \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda v) - f(x)}{\lambda} = \sum_{i=1}^{3} v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

При этом, как нетрудно видеть, соответствие между векторными полями и линейными дифференциальными операторами является взаимно-однозначным. Оказывается, именно такая точка зрения на векторные поля, как на линейные дифференциальные операторы, оказывается плодотворной для корректного перенесения определения векторных полей на многообразия.

Определим векторное поле X на $\mathcal{M}$ как R-линейное дифференцирование кольца $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$, т.е. как отображение $X\colon \mathfrak{F}(\mathcal{M}) \to \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, удовлетворяющее свойствам:

1. $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ (*правило Лейбница*);
2. $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$, где f и g — произвольные элементы кольца $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$, λ и μ — произвольные вещественные числа.
3. Суммой векторных полей $X + Y$ назовем векторное поле, которое действует на произвольную функцию f по правилу: $(X+Y)(f) = X(f) + Y(f)$.
4. Умножением векторного поля X на функцию g (слева) назовем векторное поле gX, которое на произвольную функцию f действует по правилу: $(gX)(f) = g \cdot X(f)$.

Оказывается, что перечисленных свойств и определений достаточно для того, чтобы установить следующие основные свойства векторных полей на многообразии.

Теорема.

1. $X(C) = 0$ для любой постоянной функции C;

2. Векторные поля $(\partial_1, \ldots, \partial_m)$ образуют базис векторных полей в каждой карте атласа $\mathbf{At}(\mathcal{M})$.

Доказательство. Первое свойство вытекает из свойства R-линейности, правила Лейбница и следующей выкладки:

$$X(C) = CX(1) = CX(1 \cdot 1) = C(1X(1) + X(1)1) =$$

$$2CX(1) = 2X(C) \Rightarrow X(C) = 0.$$

Чтобы доказать второе свойство, мы должны доказать, что (а) векторные поля ∂_i линейно-независимы и (б) любое векторное поле X представляется в виде линейной комбинации

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где X^i — некоторые коэффициенты (функции на $\mathcal{M}$), однозначно связанные с X. Отметим сначала, что векторное поле ∂_i *по определению* действует на функцию f в каждой точке p из координатной окрестности U по правилу:

$$\partial_i(f)(x_p) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_p},$$

где $x = (x^1, \ldots, x^m)$ — система координат на U. Докажем, что поля ∂_i линейно-независимы. Пусть существует линейная комбинация $\alpha^1\partial_1 + \cdots + \alpha^m\partial_m$, которая на всех функциях обращается в нуль. Подействуем этой комбинацией поочередно на координатные функции $f^1 = x^1$, $f^2 = x^2, \ldots,$ $f^m = x^m$. Получим последовательно: $\alpha^1 = 0, \ldots, \alpha^m = 0$. Следовательно векторные поля $(\partial_1, \ldots, \partial_m)$ линейно-независимы. Для доказательства второй части утверждения отметим, что для всякой функции f с непрерывными частными производными имеет место следующее ее координатное представление в каждой точке некоторой карты:

$$f(x) = f(x_p) + \sum_{i=1}^{m} A_i(x^i - x^i_p), \tag{3}$$

где коэффициенты A_i зависят от x и x_p и при $x = x_p$ равны частным производным $\partial_i f|_p$. Выражение для A_i имеет следующий явный вид:

$$A_i = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}((1-t)x_p + tx)\,dt$$

и является, по сути, средним значением i-ой частной производной, вычисленным на прямолинейном отрезке, соединяющем точки x_p и x координатного пространства. Рассмотрим некоторое векторное поле X и положим по определению $X(x^i) \equiv X^i$. Составим комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{m} X^i \partial_i$. Для того, чтобы доказать равенство $X = X^i \partial_i$ необходимо и достаточно убедиться, что левая и правая часть этого равенство приводит к одному и тому же результату при действии на произвольную функцию f. Используя представление (3) и действуя на его левую часть векторным полем X в точке p, имеем цепочку равенств:

$$X(f)(p) = X(f(x_p) + \sum_{i=1}^{m} A_i(x^i - x^i_p))|_{x=x_p} =$$

$$\sum_{i=1}^{m} [X(A_i)(x^i - x^i_p) + A^i X(x^i - x^i_p)]|_{x=x_p} = \sum_{i=1}^{m} X^i_p \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x=x_p}.$$

Кроме представления (3) мы использовали последовательно R-линейность, правило действия на постоянную функцию, правило Лейбница и свойства коэффициентов A^i. Действуя на f векторным полем вида $X^i \partial_i$ в точке p очевидно получаем то же самое. Ввиду произвольности выбора точки p можно утверждать, что в каждой координатной карте семейство координатных векторных полей $\{\partial_i\}_{i=1,\dots,m}$ образует базис для векторных полей. Коэффициенты $X^i \equiv X(x^i)$ называются *координатами векторного поля в координатном базисе* $\{\partial_i\}$, связанном с некоторой картой U. $\square$

Векторное поле X на многообразии $\mathcal{M}$ называется *гладким,* если при действии на любую гладкую функцию результат будет гладкой функцией. Переходя к координатам, нетрудно убедиться, что это определение эквивалентно следующему: векторное поле X на многообразии $\mathcal{M}$ называется гладким, если в каждой карте $\mathbf{At}(\mathcal{M})$ его координаты X^i являются гладкими функциями. Операция суммы двух гладких векторных полей и умножения векторного поля на гладкую функцию, очевидно, не выводят из класса гладких векторных полей. Это означает, что гладкие векторные поля образуют $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$-*модуль,* который мы будем обозначать $\mathfrak{V}(\mathcal{M})$.

Для любой пары гладких векторных полей X и Y можно определить их *скобку Ли* $[X, Y] = XY - YX$. Чтобы получить координатное представление скобки Ли, правую часть этого определения нужно применить к произвольной гладкой функции $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$. В результате получим цепочку равенств:

$$(XY - YX)(f) = X^i\partial_i(Y^j\partial_j f) - Y^i\partial_i(X^j\partial_j f) =$$

$$(X^i\partial_i Y^j)\partial_j f - (Y^i\partial_i X^j)\partial_j f) = [X, Y](f),$$

где была учтена перестановочность вторых частных производных. В силу произвольности функции f, приходим к выводу о том, что скобка Ли определяет векторное поле (дифференцирование) с координатами:

$$[X, Y]^i = X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i. \tag{4}$$

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что скобка Ли обладает следующими важными свойствами:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (антисимметричность);
2. $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ (R-линейность);
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (тождество Якоби).

Здесь X, Y, Z — произвольные векторные поля, α и β — произвольные вещественные числа. Важные для приложений геометрические свойства скобки Ли мы рассмотрим в разделе 9.

4. Касательное и кокасательное пространства. 1-формы.

Рассмотрим множество всех векторов, отнесенных к некоторой фиксированной точке $p \in \mathcal{M}$. Это множество образует m-мерное вещественное линейное пространство, $T_p\mathcal{M}$, причем в качестве его базиса можно выбрать систему координатных полей $\{\partial_i|_p\}$, отнесенных к точке p.

Пространство $T_p\mathcal{M}$ называется касательным к многообразию $\mathcal{M}$ пространством в точке p.

Рассмотрим теперь множество всех линейных отображений $T_p\mathcal{M} \to R$, элементами которого являются линейные вещественнозначные функции на векторах из $T_p\mathcal{M}$. Каждое линейное отображение ω_p из этого множества определяется своим действием на векторы:

$$\omega_p(X_p) = \lambda \in R, \tag{5}$$

при этом число λ называется *значением* ω_p *на векторе* X_p. Индекс p напоминает нам, что наше рассмотрение относится к фиксированной точке p. Свойство линейности ω_p выражается равенством:

$$\omega_p(\alpha X_p + \beta Y_p) = \alpha\omega_p(X_p) + \beta\omega_p(Y_p), \tag{6}$$

которое должно выполняться для всяких векторов X_p и Y_p. Равенства

$$(\alpha(\omega_1)_p + \beta(\omega_2)_p)(X_p) = \alpha(\omega_1)_p(X_p) + \beta(\omega_2)_p(X_p) \tag{7}$$

задают на множестве таких линейных функций структуру линейного пространства.

Линейное пространство всех линейных отображений $T_p\mathcal{M} \to R$ называется кокасательным к многообразию $\mathcal{M}$ пространством в точке p и обозначается $T_p^*\mathcal{M}$, а его элементы называются 1-формами в точке p.

Каковы размерность и базис пространства $T_p^*\mathcal{M}$? Рассмотрим 1-формы $\tilde{x}_p^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ которые действуют на любой вектор X_p по следующему правилу:

$$\tilde{x}_p^i(X_p) = X_p^i.$$

Другими словами 1-форма $\tilde{x}_p^i$ каждому вектору ставит в соответствие его i-ую координату. Из этого определения вытекает правило действия этих 1-форм на координатный векторный базис:

$$\tilde{x}_p^i(\partial_j|_p) = \delta_j^i. \tag{8}$$

Докажем, что совокупность $\{\tilde{x}_p^i\}_{i=1,\ldots,m}$ образует базис в $T_p^*\mathcal{M}$. Линейная независимость $\{\tilde{x}_p^i\}$ вытекает из цепочки равенств:

$$\alpha_1\tilde{x}_p^1 + \cdots + \alpha_m\tilde{x}_p^m = 0 \Rightarrow (\alpha_1\tilde{x}_p^1 + \cdots + \alpha_m\tilde{x}_p^m)(\partial_i|_p) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

(мы использовали равенство (8)). Обозначим для некоторой 1-формы ω_p значение $\omega_p(\partial_i|_p)$ посредством $(\omega_p)_i$. Проверьте самостоятельно, что 1-форма $(\omega_p)_i\tilde{x}^i_p$ действует на любой вектор X_p так же, как и ω_p:

$$(\omega_p)_i\tilde{x}^i_p(X_p) = (\omega_p)_i\tilde{x}^i_p(X^j_p\partial_j|_p) = (\omega_p)_iX^j_p\delta^i_j = (\omega_p)_iX^i_p. \tag{9}$$

Таким образом, мы доказали, что размерность кокасательного пространства равна размерности касательного пространства и равна m, а его базис образует набор координатных 1-форм $\tilde{x}^i_p$.

Нашу локальную конструкцию $T^*_p\mathcal{M}$ можно теперь распространить на все многообразие или его часть, если разрешить 1-формам "гладко зависеть от точки", аналогично тому, как мы переходим от вектора X_p к векторному полю $X \in \mathfrak{V}(\mathcal{M})$. А именно, определим поле 1-формы ω, как $\mathfrak{F}$-линейное отображение $\mathfrak{V}(\mathcal{M}) \to \mathfrak{F}(\mathcal{M})$. Это поле каждому векторному полю X ставит в соответствие скалярную функцию на $\mathcal{M}$:

$$\omega(X) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}),$$

так что в каждой точке p, имеет место формула (5). Поле 1-формы называется гладким, если его действие на любое гладкое векторное поле дает в результате гладкую функцию. $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$-линейность поля ω означает следующее обобщение равенства (6):

$$\omega(fX + gY) = f\omega(X) + g\omega(Y), \tag{10}$$

где f, g — произвольные функции из $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$. Обобщение формулы (7) на поля 1-форм позволяет поточечно складывать эти поля и умножать их на функции из $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$:

$$(f\omega_1 + g\omega_2)(X) = f\omega_1(X) + g\omega_2(X), \tag{11}$$

где ω_1, ω_2 — произвольные поля 1-форм, f, g — произвольные функции из $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$.

Типичным и в определенном смысле основным типом 1-форм является *дифференциал df функции f*. На любом векторном поле X его действие определено по формуле:

$$df(X) \equiv X(f). \tag{12}$$

Проверьте самостоятельно, что все требуемые для 1-форм свойства в этом определении выполнены. Рассмотрим совокупность $\{dx^i\}_{i=1,\dots,m}$ дифференциалов координатных функций x^i: $\mathcal{M} \to R$ в некоторой карте атласа $\mathbf{At}(\mathcal{M})$. Пользуясь определением (12), имеем:

$$dx^i(X) = X(x^i) = X^j \partial_j(x^i) = X^j \delta^i_j = X^i.$$

Другими словами, поле dx^i является продолженной на многообразие или его часть версией локальной 1-формы $\tilde{x}^i_p$. Отсюда следует, что поля $\{dx^i\}_{i=1,\dots,m}$ являются базисными в пространстве полей 1-форм и любую 1-форму можно представить в виде разложения:

$$\omega = \omega_i dx^i, \tag{13}$$

при этом совокупность $\{\omega_i\}_{i=1,\dots,m}$ называется *координатами 1-формы* ω (в данной карте с координатами x). Эти координаты теперь являются функциями координат многообразия (гладкими, если поле 1-формы гладкое). Представление (13) объясняет, почему поля 1-форм иногда называют *дифференциальными 1-формами.* Результат действия поля 1-формы ω на векторное поле X является скалярной функцией, значение которой в каждой точке p определяется формулой (9).

Как следует из формулы (11), поля 1-форм образуют $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$-модуль, который мы будем обозначать $\mathfrak{V}^*(\mathcal{M})$.

Сделаем несколько замечаний.

1. 1-формы — это геометрические объекты в определенном смысле "равноправные" с векторами. Если наглядным образом вектора X_p является направленный отрезок, приложенный к определенной точке, то наглядным образом 1-формы ω_p является плоская площадка, проходящая через определенную точку. Эта площадка образована всеми векторами X_p, на которых выполняется равенство $\omega_p(X_p) = 0$. В координатах это равенство примет вид: $(\omega_p)_i X^i_p = 0$, что при фиксированных координатах $(\omega_p)_i$ дает уравнение плоскости, проходящей через точку p в касательном пространстве $T_p\mathcal{M}_m$. Эта плоскость называется *ядром* 1-формы в точке p и обозначается $\ker \omega_p$.

2. Равноправие 1-форм и векторов проявляется в их взаимной дуальности: векторы тоже можно рассматривать как линейные

функции на 1-формах, при этом $X_p(\omega_p) \equiv \omega_p(X_p)$. Формально это означает, что $(T_p)^{**}(\mathcal{M}) = T_p(\mathcal{M})$ и $\mathfrak{V}^{**}(\mathcal{M}) = \mathfrak{V}(\mathcal{M})$.

3. В старой литературе по геометрии *векторы* называются *контравариантными векторами*, а 1-формы — *ковариантными векторами* и в покомпонентной записи первые записывают с индексами вверху, например, X^i, а вторые — с индексами внизу, например, ω_i. На самом деле, по существу, дело здесь не в положении индексов (хотя их расположение облегчает интерпретацию и выкладки), а в различной геометрической природе и различных законах преобразования компонент этих объектов при замене системы координат. Компоненты векторов при смене координат $x \to x' = x'(x)$ преобразуются по закону:

$$X'^i = J^i_j X^j,$$

а компоненты 1-форм по закону:

$$\omega'_i = (J^{-1})^j_i \omega_j,$$

где

$$J^i_j \equiv \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}, \quad (J^{-1})^i_j \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$$

прямая и обратная матрицы Якоби. Говоря на современном языке, *векторы и 1-формы реализуют различные простейшие линейные представления группы общекоординатных преобразований.*

4. В качестве базисных полей необязательно рассматривать только координатные базисы $\{\partial_i\}_{i=1,\dots,m}$ и $\{dx^i\}_{i=1,\dots,m}$. Иногда в приложениях удобны базисы более общего типа: $\{e_{(i)}\}_{i=1,\dots,m}$ и $\{\theta^{(i)}\}_{i=1,\dots,m}$, где первый набор в каждой точке p определяет некоторый базис касательного пространства $T_p\mathcal{M}$, а второй набор — базис кокасательного пространства $T^*\mathcal{M}$. При этом эти базисы могут даже не быть дуальными друг другу, т.е. $G^i_j \equiv \theta^{(i)}(e_{(j)}) \neq \delta^i_j$ (но "матричное поле" $(G)_p$ обязано быть невырожденным, т.е. $\det(G)_p \neq 0$ для всех $p \in \mathcal{M}$). Соответствующий подход к описанию геометрических объектов на многообразиях называется *тетрадным формализмом*, а базисы такого

общего типа иногда называют *неголономными*. Мы не будем использовать их в настоящих лекциях.

5. Множества всевозможных пар (p, v_p) и (p, ω_p), где $v_p \in T_p\mathcal{M}$, а $\omega_p \in T_p^*\mathcal{M}$ называются соответственно *касательным* и *кокасательным* расслоениями многообразия $\mathcal{M}$ и обозначаются соответственно $T\mathcal{M}$ и $T^*\mathcal{M}$. Эти расслоения являются гладкими многообразиями, причем $\dim T\mathcal{M} = \dim T^*\mathcal{M} = 2m$. Наряду с самим многообразием $\mathcal{M}$ они являются важнейшими объектами при изучении глобальных топологических характеристик многообразия [5].

5. Тензоры

По аналогии с тем, как из переменных $\{x^1, \ldots, x^n\}$ можно строить однородные полиномы вида:

$$P_1 = a_i x^i; \quad P_2 = a_{ij} x^i x^j; \quad \ldots P_n = a_{i_1 \ldots i_n} x^1 \cdot \cdots \cdot x^n,$$

где a_i, a_{ij}, $a_{i_1 \ldots i_n}$ — наборы коэффициентов, из векторов и 1-форм на многообразии $\mathcal{M}$ можно строить *тензорные полиномы*, вводя операцию $\otimes$ *тензорного произведения*. В дальнейшем все конструкции являются локальными, т.е. должны определяться в точке. В настоящих лекциях, допуская для упрощения обозначений и сокращения объема некоторую вольность, мы будем сразу говорить про *тензорные поля* на многообразии, понимая под ними совокупность тензоров во всех точках многообразия и не делая различия между тензорными полями и тензорами.

Определим тензорное произведение $\omega_1 \otimes \omega_2$ двух 1-форм ω_1 и ω_2 как билинейную вещественнозначную функцию на векторных полях, действующую по правилу:

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(X, Y) = \omega_1(X)\omega_2(Y) \tag{14}$$

при всех $X, Y \in \mathfrak{V}(\mathcal{M})$, причем

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(fX + gY, Z) = f\omega_1(X)\omega_2(Z) + g\omega_1(Y)\omega_2(Z),$$

и

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(X, fY + gZ) = f\omega_1(X)\omega_2(Y) + g\omega_1(X)\omega_2(Z)$$

для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{V}(\mathcal{M})$ и всех $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ (свойство $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$-линейности по обоим аргументам).

Определенное таким образом тензорное произведение двух 1-форм является простейшим представителем — так называемым, *простым* или *разложимым* — пространства $\mathcal{T}^{(2,0)}(\mathcal{M})$ тензоров валентности $(2,0)$, которые можно определить как $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$-билинейные функции на парах векторов из $\mathfrak{V}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{V}(\mathcal{M})$. Общий элемент из этого пространства, вообще говоря, не является простым или разложимым, т.е. его, в общем случае, нельзя представить в виде тензорного произведения двух 1-форм. Оказывается, что его всегда можно представить в виде линейной комбинации простых тензоров такого вида.

Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим тензорные произведения координатных 1-форм: $\omega_{ij} \equiv dx^i \otimes dx^j$. Нетрудно показать, что они образуют базис в пространстве $\mathcal{T}^{(0,2)}(\mathcal{M})$. Действительно, предполагая их линейную зависимость, имеем линейную комбинацию $a_{ij}\omega^{ij} = 0$. Это означает, что на любой паре векторов $a_{ij}\omega^{ij}(X, Y) = 0$. Выбирая в качестве X и Y всевозможные пары координатных векторов ∂_i, в силу определения (14) операции $\otimes$ и ее линейности получаем последовательно:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad \ldots, a_{nn} = 0,$$

т.е. ω^{ij} — линейно независимы. Рассмотрим произвольный тензор $D \in \mathcal{T}^{(0,2)}(\mathcal{M})$. Обозначим

$$D_{ij} \equiv D(\partial_i, \partial_j).$$

Тогда этот тензор единственным образом представляется в виде разложения:

$$D = D_{ij}\omega^{ij},$$

что проверяется действием левой и правой части на произвольную пару векторов, записанных в виде их разложений в базисе ∂. К примеру действие правой части в силу определения ω^{ij}, определения (14) и общих свойств базисов dx и ∂ приведет к результату:

$$D(X, Y) = D_{ij}X^iY^j$$

— координатному правилу вычисления действия тензора D на пару векторов X, Y. Из этого представления очевидно, что в каждой точке тензор $D \in \mathcal{T}^{(0,2)}(\mathcal{M})$ определяет обычную билинейную форму, при этом ее компоненты D_{ij} зависят от выбора точки многообразия.

Вспоминая о дуальности векторных полей и полей 1-форм и о соотношении $\mathfrak{V}^{**}(\mathcal{M}) = \mathfrak{V}(\mathcal{M})$, нетрудно построить дуальный векторный аналог пространства $\mathcal{T}^{(2,0)}(\mathcal{M})$. Простым или разложимым элементов этого пространства является тензорное произведение $X \otimes Y$ пары векторов, которое определяется своим действием на произвольную пару 1-форм:

$$(X \otimes Y)(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1)Y(\omega_2) \equiv \omega_1(X)\omega_2(X)$$

со свойствами $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$-линейности по каждому аргументу. Тензоры такого типа являются элементами пространства тензоров $\mathcal{T}^{(0,2)}(\mathcal{M})$. Повторяя дословно все предыдущие построения и выкладки, приходим к координатному представлению любого тензора $Q \in \mathcal{T}^{(0,2)}(\mathcal{M})$:

$$Q = Q^{ij} \partial_i \otimes \partial_j,$$

где $Q^{ij} \equiv Q(dx^i, dx^j)$, а множество $\{\partial_i \otimes \partial_j\}$ образует координатный базис в $\mathcal{T}^{(0,2)}(\mathcal{M})$.

Построение общей конструкции тензора типа (r, s) теперь очевидно.

Рассмотрим $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$-полилинейное отображение

$$T : \underbrace{\mathfrak{V}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{V}(\mathcal{M})}_{r \text{ раз}} \times \underbrace{\mathfrak{V}^*(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{V}^*(\mathcal{M})}_{s \text{ раз}} \to R,$$

где r и s — любые неотрицательные вещественные числа. Такое отображение определяет элемент пространства $\mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M})$, называемого *пространством тензоров валентности* (r, s).

У каждого тензора такой валентности имеется r векторных аргументов и s аргументов в виде 1-форм. В координатах такой тензор представляется разложением вида:

$$T = T^{\beta_1 \ldots \beta_s}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} (dx^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\alpha_r} \otimes \partial_{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\beta_s}),$$

где $T^{\beta_1 \ldots \beta_s}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} \equiv T(\partial_{\alpha_1}, \ldots, \partial_{\alpha_r}, dx^{\beta_1}, \ldots, dx^{\beta_s})$ — компоненты тензора в базисе $\{dx, \partial\}$, $(dx^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\alpha_r} \otimes \partial_{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\beta_s})$ — базис в пространстве $\mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M})$. Действие тензора на свои аргументы в координатах записывается в виде суммы:

$$T(X_1, \ldots, X_r, \omega_1, \ldots, \omega_s) = T^{\beta_1\ldots\beta_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_r} X_1^{\alpha^1} \cdots X_r^{\alpha_r} (\omega_1)_{\beta_1} \cdots (\omega_s)_{\beta_s}.$$

Разумеется 1-формы и векторы сами являются тензорами валентностей $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно, а скалярные функции формально являются элементами пространства тензоров нулевого ранга $\mathcal{T}^{(0,0)}(\mathcal{M})$.

Рассмотрим теперь основные операции над тензорами.

1. *Тензорное произведение тензоров.* Операция тензорного произведения определяет отображение вида:

$$\otimes : \mathcal{T}^{(r_1,s_1)}(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}^{(r_2,s_2)}(\mathcal{M}) \to \mathcal{T}^{(r_1+r_2,s_1+s_2)}(\mathcal{M}),$$

такое, что любой паре тензоров $T_1 \in \mathcal{T}^{(r_1,s_1)}$ и $T_2 \in \mathcal{T}^{(r_2,s_2)}$ она ставит в соответствие тензор $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{T}^{(r_1+r_2,s_1+s_2)}$, причем его значение на любых $r_1 + r_2$ векторах X_i и $s_1 + s_2$ 1-формах определяется по правилу:

$$(T_1 \otimes T_2)(X_1, \ldots, X_{r_1}, \ldots, X_{r_1+r_2}, \omega_1, \ldots, \omega_{s_1}, \ldots \omega_{s_1+1}, \ldots, \omega_{s_1+s_2}) \equiv$$

$$T_1(X_1, \ldots, X_{r_1}, \omega_1, \ldots, \omega_{s_1}) T_2(X_{r_1+1}, \ldots, X_{r_1+r_2}, \omega_{s_1+1}, \ldots, \omega_{s_1+s_2}).$$

Например, если $T_1 \in \mathcal{T}^{(2,0)}(\mathcal{M})$, $T_2 \in \mathcal{T}^{(0,1)}(\mathcal{M})$, то

$$(T_1 \otimes T_2)(X, Y, \omega) = T_1(X, Y) T_2(\omega).$$

Компоненты тензорного произведения тензоров равны произведению соответствующих компонент сомножителей (докажите!). Например для приведенного выше примера:

$$(T_1 \otimes T_2)^k_{ij} = (T_1)_{ij} (T_2)^k.$$

Полагая один из сомножителей тензорного произведения скалярной функцией, приходим к операции умножения тензора на скаляр, свойства которой очевидны. Отметим, что тензорное произведение, вообще говоря, некоммутативно: $T_1 \otimes T_2 \neq T_2 \otimes T_1$.

2. *Сумма тензоров.* Суммой тензоров одинаковой валентности называется тензор той же валентности, значение которого на его

аргументах равно по определению сумме значений слагаемых на тех же аргументах:

$$(T_1 + T_2)(X_1, \ldots, X_r, \omega_1, \ldots, \omega_s) \equiv$$

$$T_1(X_1, \ldots, X_r, \omega_1, \ldots, \omega_s) + T_2(X_1, \ldots, X_r, \omega_1, \ldots, \omega_s)$$

для всех $T_1, T_2 \in T_1 \in \mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M})$ и для всех r и s. Проверьте, опираясь на это определение, что координаты суммы тензоров равны сумме соответствующих координат слагаемых. Проверьте также, что сумма тензоров дистрибутивна относительно умножения на скаляры:

$$f(T_1 + T_2) = fT_1 + fT_2$$

для всех тензоров T_1 и T_2 любой одинаковой валентности и любой скалярной функции f на $\mathcal{M}$.

3. *Свертка или внутреннее произведение тензоров.* Для любого тензора $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M})$, у которого $r > 0$ и $s > 0$ определена операция свертки:

$$C^{s_1}_{r_1} : \mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M}) \to \mathcal{T}^{(r-1,s-1)}(\mathcal{M}),$$

действующая по правилу:

$$(C^{s_1}_{r_1} T)(X_1, \ldots, \widehat{X_{r_1}}, \ldots, X_r, \omega_1, \ldots, \omega_1, \ldots, \widehat{\omega_{s_1}}, \ldots, \omega_s) \equiv \tag{15}$$

$$T(X_1, \ldots, \partial_i, \ldots, X_r, \omega_1, \ldots, \omega_1, \ldots, dx^i, \ldots, \omega_s).$$

Здесь $0 < r_1 \leq r$ и $0 < s_1 \leq s$, шляпка над аргументом означает, что он отсутствует, а по индексу i производится суммирование. В координатах $C^{s_1}_{r_1}$-свертка тензора осуществляется приравниванию r_1-ого нижнего индекса s_1-ому верхнему и суммированию по всем значениям этого одинакового индекса от 1 до m. Например, для разобранного в п.1 примера:

$$(C^1_2(T_1 \otimes T_2))_\alpha \equiv (T_1)_{\alpha\beta}(T_2)^\beta.$$

Ввиду согласованного (взаимно-обратного) закона преобразования базисов dx и ∂x, определение свертки не зависит от конкретного выбора базиса (проверьте!)

Сделаем в заключении этого параграфа несколько замечаний.

1. Замечательная особенность всех введенных алгебраических операций заключается в том, что тензоры при таких операциях переходят в новые тензоры. В физике тензоры используются для представления физических величин в физических уравнениях, удовлетворяющих условию их независимости от выбора системы координат. Таким образом, рассмотренные нами операции представляют собой "разрешенные правила игры" в "тензорный конструктор": например операцию суммы тензоров можно использовать для инвариантного описания принципа аддитивности или принципа суперпозиции, а тензорное произведение — для определения составных (неэлементарных) тензорных физических величин. Примером "запрещенной" операции является, например, операция, заключающаяся в суммировании всех компонент тензора. Полученное число, вообще говоря, не будет тензором (в данном случае скаляром) и его значение в одной системе координат, вообще говоря, не будет совпадать с суммой компонент в какой-нибудь другой системе координат. Для полноты алгебру тензоров следует дополнить тензорным анализом, включающем в себя дифференциальные операции, переводящие тензоры в тензоры. К их числу относятся, например, ковариантная производная, внешний дифференциал, производная Ли. В настоящих лекциях мы рассмотрим далее лишь последнюю операцию.

2. Операция $\otimes$ позволяет рассматривать множество тензоров всех валентностей $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ как *градуированную тензорную алгебру над* $\mathcal{M}$:

   $$\mathcal{T}(\mathcal{M}) \equiv \bigoplus_{r,s} \mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M}).$$

   Здесь $\oplus$ — символ стандартной прямой суммы линейных пространств. Действительно, множество $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ замкнуто относительно операции $\otimes$, при этом любой тензор относится к какому-то определенному типу, задаваемому парой чисел (r, s), определяющей $\mathbb{Z}_+^2$-градуировку.

3. Тензорное поле является гладким, если его значение на любых гладких аргументах является гладкой скалярной функци-

ей. Тензорное поле гладко тогда и только тогда, когда его компоненты в некоторой системе координат являются гладкими функциями на $\mathcal{M}$.

4. Можно рассмотреть и другие интерпретации тензоров $\mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M})$. К примеру тензор P валентности $(1,1)$ в соответствии с нашим определением мы должны рассматривать как отображение векторного поля и 1-формы в скалярную функцию. Но можно посмотреть на эту ситуацию иначе. Значение P на векторе X является таким, объектом, который действуя на любую один форму даст скаляр. Но таким свойством обладают только векторы. Значит помимо интерпретации

   $$P : \mathfrak{V}(M) \times \mathfrak{V}^*(M) \to \mathfrak{F}(\mathcal{M}),$$

   существует равноправная интерпретация:

   $$P : \mathfrak{V}(M) \to \mathfrak{V}(M),$$

   позволяющая рассматривать тензорное поле P как поле *линейного оператора* или *аффиннора.* Компонентная запись делает это наблюдение явным:

   $$Y^\alpha = P^\alpha_\beta X^\beta,$$

   поскольку представляет собой обычное правило записи действия оператора в матричной компонентной форме. Аналогичная смена интерпретации возможна и для тензоров всех других валентностей, отличных от $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

5. Тензор $S \in \mathcal{T}^{(r,0)}(\mathcal{M})$ называется *симметричным* (*антисимметричным*), если его значение не меняется при любой (четной) перестановке его аргументов (а при любой нечетной оно меняет знак). Аналогичное определение имеет место и для тензоров валентности $(0,s)$. Тензор может быть симметричным или антисимметричным по некоторому подмножеству аргументов (или одновременно симметричным по одному подмножеству аргументов и антисимметричным по другому). При этом тензор смешанного типа (r,s) может быть симметричным или антисимметричным по векторам или 1-формам по отдельности, но не имеет никакого смысла симметризация или антисимметризация тензора по аргументам различных типов.

6. С групповой точки зрения тензоры на многообразии являются различными, вообще говоря, приводимыми линейными представлениями группы общекоординатных преобразований. При этом их разбиения на симметричные или антисимметричные соответствует разложению общего линейного представления на неприводимые относительно действия группы $P_r \times P_s$ компоненты (схемы Юнга). Здесь P_r и P_s — группы перестановок, действующие на аргументы тензора валентности (r, s).

6. Отображения многообразий и геометрических объектов

При отображении многообразий различные геометрические объекты можно "переносить" с одних многообразий на другие.

Пусть h: $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ — отображение многообразий. h является *гладким отображением*, если его координатное представление является гладким в смысле обычного анализа. Более подробно, если (U, φ) карта из $\mathbf{At}(\mathcal{M})$, а (V, ψ) карта из $\mathbf{At}(\mathcal{N})$, такие что $V \cap h(U) \neq \varnothing$, то на $U \cap h^{-1}(V \cap h(U))$ определено координатное представление отображения $h_{UV} : R^m \to R^n$ по формуле:

$$h_{UV}(x_p) \equiv \psi \circ h \circ \varphi^{-1}(x_p) \in R^n. \tag{16}$$

Отображение h гладко, если функция h_{UV} — гладкая для всех пар $\{U, V\} \in \mathbf{At}(\mathcal{M}) \times \mathbf{At}(\mathcal{N})$, для которых $V \cap h(U) \neq \varnothing$. Наглядно формула (16) иллюстрируется диаграммой (17): справедливость формулы (16) эквивалентна коммутативности этой диаграммы.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_m & \xrightarrow{h} & \mathcal{N}_n \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ R^m & \xrightarrow{h_{UV}} & R^n \end{array} \tag{17}$$

Конструкция координатного представления допускает некоторое обобщение. Пусть $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{N})$ и h — гладкое отображение $\mathcal{M}_m \to \mathcal{N}_n$. Тогда на $\mathcal{M}_m$ с помощью формулы

$$f_h \equiv f \circ h \tag{18}$$

определена гладкая функция $f_h \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$. Другими словами, *при гладких отображении многообразий гладкие функции "переносятся" в противоположную сторону — с образа на прообраз.*

А как переносятся векторы при отображениях многообразий? Рассмотрим некоторый вектор $X_p \in T_p\mathcal{M}$.

Всякое гладкое отображение $h\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ определяет в каждой точке $p \in \mathcal{M}$ отображение $(h_*)\colon T_p\mathcal{M} \to T_{h(p)}\mathcal{N}$, которое называется *дифференциалом отображения h в точке p* и действует по правилу:

$$(h_*)(X_p)(f) \equiv X_p(f_h) = X_p(f \circ h) \tag{19}$$

для всякой $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{N})$.

Другими словами, при отображении h всякий вектор X_p как дифференцирование на $\mathcal{M}$ переходит в вектор-дифференцирование $(h_*)_p(X_p)$ на $\mathcal{N}$, таким образом, что результат дифференцирования им произвольной функции f совпадает с результатом дифференцирования исходного вектора перенесенной на многообразие $\mathcal{M}$ функции f_h. В силу своего определения дифференциал отображения h_* является линейным отображением касательных пространств. Чтобы установить его координатное представление, перейдем к координатам в базисах $\partial/\partial x|_p$ и $\partial/\partial y|_{h(p)}$. По определению дифференциала имеем:

$$(h_*)(X_p)(f) = [(h_*)(X_p)]^\alpha \left.\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\right|_{h(p)} =$$

$$X_p^\beta \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_p (f \circ h)(p) = X_p^\beta \left.\frac{\partial f}{\partial y^\beta}\right|_{h(p)} \left.\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\right|_p,$$

откуда, в силу произвольности f и произвольности точки p следует координатное представление h_*:

$$[(h_*)(X)]^\alpha_{h(p)} = \left.\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_p X_p^\beta. \tag{20}$$

Мы видим, что дифференциал отображения h в каждой точке многообразия $\mathcal{M}$ в действительности осуществляет линейное отображение касательных пространств $T_p\mathcal{M} \to T_{h(p)}\mathcal{N}$ посредством $n \times m$ матрицы преобразования $(\partial y/\partial x)$, называемой *матрицей Якоби,* компоненты которой зависят от точки. Диаграмма (21) наглядно иллюстрирует действие дифференциала отображения: определение (19) эквивалентно коммутативности этой диаграммы.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_m \arrow[r, "h"] & \mathcal{N}_n \\ T\mathcal{M} \arrow[u, "\pi_{\mathcal{M}}"] \arrow[r, "h_*"] & T\mathcal{N} \arrow[u, "\pi_{\mathcal{N}}"'] \end{tikzcd} \tag{21}$$

Отображения $\pi_{\mathcal{M}}$ и $\pi_{\mathcal{N}}$ на диаграмме — это естественные проекции касательных расслоений этих многообразий, действующие по правилам:

$$\pi_{\mathcal{M}} : T\mathcal{M} \ni (p, X_p) \mapsto p; \quad \pi_{\mathcal{N}} : T\mathcal{N} \ni (q, Y_q) \mapsto q.$$

Перейдем к рассмотрению поведения 1-форм при отображениях. Нетрудно понять, что, как и функции, 1-формы "переносятся" отображениями $h : \mathcal{M}_m \to \mathcal{N}_n$ в "обратную сторону", по той простой причине, что 1-формы — это и есть функции на векторах. Действительно,

если $\omega \in \mathfrak{V}^*(\mathcal{N})$, то в каждой точке $q = h(p) \in \mathcal{N}$ корректно определено отображение h^*_q: $T^*_q\mathcal{N} \to T^*_p(\mathcal{M})$, называемое *кодифференциалом отображения h в точке p*, действующее на всяком $Y_q \in T_q\mathcal{N}$ по правилу:

$$h^*(\omega_q)(X_p) \equiv \omega_p((h_*)(X_p)). \tag{22}$$

Другими словами, *значение образа кодифференциала некоторой 1-формы на любом векторе пространства $T_p(\mathcal{M})$ равно значению исходной 1-формы на образе дифференциала этого вектора.* В координатах согласно определению (22) будем иметь:

$$h^*(\omega_q)(X_p) = [h^*(\omega_q)]_\alpha X^\alpha_p \equiv (\omega_p)_\beta \left.\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\right|_p X^\alpha_p,$$

откуда ввиду произвольности p и X_p получаем координатное представление действия кодифференциала:

$$[h^*(\omega)]_\alpha = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\omega_\beta. \tag{23}$$

Мы видим, что кодифференциал h^* отображения h в каждой точке многообразия $\mathcal{N}$ осуществляет линейное отображение кокасательных пространств $T^*_{h(p)}\mathcal{N} \to T_p\mathcal{M}$ посредством $m \times n$ матрицы преобразования $(\partial y/\partial x)^{\mathrm{T}}$, которую можно назвать *сопряженной матрицей Якоби.* Диаграмма (24) наглядно иллюстрирует действие кодифференциала отображения: определение (22) эквивалентно коммутативности этой диаграммы.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_m & \xrightarrow{h} & \mathcal{N}_n \\ {\scriptstyle \pi^*_{\mathcal{M}}}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \pi^*_{\mathcal{N}}} \\ T\mathcal{M} & \xleftarrow{h^*} & T\mathcal{N} \end{array} \tag{24}$$

Отображения $\pi^*_{\mathcal{M}}$ и $\pi^*_{\mathcal{N}}$ на диаграмме — это проекции кокасательных расслоений этих многообразий, действующие по правилам:

$$\pi^*_{\mathcal{M}} : T^*\mathcal{M} \ni (p, \omega_p) \mapsto p; \quad \pi^*_{\mathcal{N}} : T^*\mathcal{N} \ni (q, \omega_q) \mapsto q.$$

Отображения дифференциала и кодифференциала легко обобщаются на тензоры специальных типов. Пусть как и прежде $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и пусть $T_1 \in \mathcal{T}^{(0,s)}(\mathcal{M})$ и $T_2 \in \mathcal{T}^{(r,0)}(\mathcal{N})$. Тогда определены отображения

$$(h_*)^{\otimes s}_p : \mathcal{T}^{(0,s)}_p(\mathcal{M}) \to \mathcal{T}^{(0,s)}_{h(p)}(\mathcal{N}), \quad (h^*)^{\otimes r}_{h(p)} : \mathcal{T}^{(r,0)}_{h(p)}(\mathcal{N}) \to \mathcal{T}^{(r,0)}_p(\mathcal{M}),$$

называемые соответственно *s-ой и r-ой тензорными степенями дифференциала и кодифференциала в точке p,* действующие на соответствующие тензоры по правилам:

$$(h_*)^{\otimes s}_p(T_1)(\omega_1, \ldots, \omega_s) \equiv T_1(h^*(\omega_1), \ldots, h_*(\omega_s)); \tag{25}$$

$$(h^*)^{\otimes r}_{h(p)}(T_2)(X_1, \ldots, X_r) \equiv T_2(h_*(X_1), \ldots, h_*(X_r)) \tag{26}$$

для всех $\omega_i \in T^*_{h(p)}\mathcal{N}$, и всех $X_j \in T_p\mathcal{M}$. В координатах эти отображения будут выражаться формулами:

$$(T_1)^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}_{h(p)} = \left.\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\beta_1}}\right|_{h(p)} \cdots \left.\frac{\partial y^{\alpha_s}}{\partial x^{\beta_s}}\right|_{h(p)} (T_1)^{\beta_1 \ldots, \beta_s}_p; \tag{27}$$

$$(T_2)_{p\,\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \left.\frac{\partial y^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\right|_p \cdots \left.\frac{\partial y^{\beta_r}}{\partial x^{\alpha_r}}\right|_p (T_2)_{h(p)\,\beta_1 \ldots, \beta_r}.$$

Тензоры смешанного типа, вообще говоря, никуда не переносятся отображениями многообразий.

Сделаем несколько замечаний к этому параграфу.

1. Гладкие функций на $\mathcal{N}$ можно понимать как элементы $\mathcal{T}^{(0,0)}(\mathcal{N})$. Таким образом, комбинация формул (18) и (26) дает:

   $$(h^*)^{\otimes 0}(f) \equiv f_h.$$

   Иногда вместо f_h используют запись h^*f для перенесенной на $\mathcal{M}$ при отображении h функции f.

2. Мы определяли и рассматривали отображения дифференциала и кодифференциала в точке. Можно ли говорить об отображениях тензорных полей? Как показывают простые примеры, в общем случае этого сделать нельзя. Предположим, что на $\mathcal{M}$ задано векторное поле X и пусть отображение h: $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ таково, что $h(p_1) = h(p_2)$ при $p_1 \neq p_2$. Поскольку, в общем случае, $(h_*)_{p_1}(X_{p_1}) \neq (h_*)_{p_2}(X_{p_2})$ (рассмотрите в качестве примера отображение $x \mapsto \sin x$ в точках $x_1 = \pi/4$ и $x_2 = 3\pi/4$), то говорить об отображениях векторных полей в такой ситуации нельзя! Замечательным фактом теории отображений гладких многообразий является *существование отображения полей 1-форм и тензоров типа $\mathcal{T}^{(r,0)}(\mathcal{N})$ на многообразие $\mathcal{M}$ при любых гладких отображениях h*! (Проверьте это!)

3. Отображение h называется *диффеоморфизмом*, если оно взаимнооднозначно, гладко и имеет гладкое обратное. Диффеоморфизм часто можно понимать в активном смысле как гладкую деформацию самого многообразия, т.е. как отображение $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Примером диффеоморфизма является замена координат на многообразии (при этом условие обратимости и гладкости, а значит и диффеоморфности может нарушаться в отдельных точках, на линиях или поверхностях — как говорят, на множестве точек меры нуль). Для координатного диффеоморфизма всегда существует обратное и матрица Якоби обратима. При этом формулы (20),(23) и (27) по существу переходят в законы преобразования компонент соответствующих геометрических объектов при замене координат.

4. Для диффеоморфизма $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ всегда существует (r,s)-*дифференциал отображения* $\phi_{(r,s)}$ и обратный $\phi^{-1}_{(r,s)}$, переводящие соответственно тензорные поля $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M})$ в поля $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{N})$ и наоборот и определяемые соотношениями:

$$\phi_{(r,s)p} \equiv \underbrace{(h_*)_p \otimes \cdots \otimes (h_*)_p}_{s \quad \text{раз}} \otimes \underbrace{(h^*)_p^{-1} \otimes \cdots \otimes (h^*)_p^{-1}}_{r \quad \text{раз}} \tag{28}$$

$$\phi^{-1}_{(r,s)p} \equiv \underbrace{(h_*)_p^{-1} \otimes \cdots \otimes (h_*)_p^{-1}}_{s \quad \text{раз}} \otimes \underbrace{(h^*)_p \otimes \cdots \otimes (h^*)_p}_{r \quad \text{раз}} \tag{29}$$

5. Можно сказать, что дифференциал отображения, рассматриваемый в некоторой точке, является локальной версией самого отображения в этой точке. Более точно, *дифференциал отображения h_* является линейной аппроксимацией отображения h в каждой точке.* Таким образом, основная идея дифференциального исчисления функций вещественных переменных остается в силе и на гладких многообразиях: *"локально все отображения линейны"*. Следует подчеркнуть, что, как и в случае стандартного вещественного анализа, в особых точках отображения это свойство, вообще говоря, нарушается.

7. Интегральные кривые векторных полей и потоки на многообразиях

В этом разделе мы рассмотрим несколько полезных понятий, тесно связанных с определением и свойствами производной Ли.

Напомним, что гладкой параметризованной кривой γ на многообразии $\mathcal{M}$ называется гладкое отображение $I \to \mathcal{M}$, где I — интервал вещественной оси, который без ограничения общности всегда можно выбрать единичным: $I = (0; 1)$. Переходя к координатам $\{x^i\}$ многообразия в некоторой карте, через которую проходит кривая, будем иметь систему функций $\{x^i(t)\}$, описывающих параметризованную кривую γ в координатах этой карты. Здесь $t \in I$ — параметр на кривой. На интервале I мы имеем постоянное векторное поле d/dt — это векторный базис на I, рассматриваемом как одномерное многообразие. Его перенос на кривую γ посредством дифференциала отображения:

$$\gamma_*(d/dt) \equiv \dot\gamma$$

называется *векторным полем скорости на кривой* γ. Кривая γ называется регулярной, если $\dot\gamma \neq 0$ в каждой точке кривой (в механической интепретации — нет точек остановки). В координатах поле скорости задается выражением (проверьте!):

$$\dot\gamma = \dot x^i(t)\partial_i,$$

где точка сверху означает дифференцирование по параметру. Рассмотрим гладкое векторное поле X на многообразии $\mathcal{M}$. Кривая γ называется *интегральной кривой векторного поля* X, если в каждой точке кривой выполняется равенство:

$$\dot\gamma = X|_\gamma, \tag{30}$$

где $X|_\gamma$ — ограничение векторного поля X на кривую γ, определяемое по формуле:

$$X|_\gamma(f) \equiv \frac{d}{dt}(\gamma^* f)$$

для всякой функции $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$. Уравнение (30) в координатах принимает вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x(t)), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{31}$$

Ее геометрический смысл заключается в коллинеарности векторов элементарных перемещений (их линейных частей) $\Delta x^i \partial_i$ вдоль кривой и векторов векторного поля в соответствующих точках кривой. Записывая это условие коллинеарности в виде[5]:

$$\frac{dx^1}{X^1} = \cdots = \frac{dx^m}{X^m} = dt, \tag{32}$$

[5]Мы предполагаем, что все компоненты векторного поля отличны от нуля. Если некоторые из них (например, $X^1, \ldots, X^r$ $r \leq m$) равны нулю, то условие коллинеарности подразумевает, что $dx^1 = 0, \ldots, dx^r = 0$, т.е. характеристики — это координатные поверхности $x^1 = \mathrm{const}, \ldots, x^r = \mathrm{const}$.

приходим к т.н. *системе уравнений на характеристики векторного поля* X, т.е. такие $m-1$-мерные поверхности, которые "сотканы" из линий тока векторного поля. Уравнения характеристик появляются как совокупность интегралов системы (32):

$$F_1(x) = C_1, \dots, F_{m-1}(x) = C_{m-1}, \tag{33}$$

где $\{C_i\}$ — семейство констант интегрирования. При фиксированных значениях констант C_i каждое уравнение из (33) определяет некоторую характеристику в $\mathcal{M}$, а в совокупности пересечение $m-1$ характеристик определяет конкретную интегральную кривую поля X. К такой конкретизации можно прийти, потребовав, чтобы эта кривая проходила через заданную точку p с координатами $(x_p^1, \dots, x_p^n)$ при $t = 0$. В таком случае в систему (33) следует подставить x_p вместо x и разрешить ее относительно C_i. После этого мы вместо (33) будем иметь систему вида:

$$F_1(x) = C_1(x_p), \dots, F_{m-1}(x) = C_{m-1}(x_p),$$

которую можно разрешить относительно каких-то $m-1$ переменных x (без ограничения общности можно считать, что это первые $m-1$-переменных $x^1, \dots, x^{m-1}$):

$$x^1 = f_1(C(x_p), x^m), \dots, x^{m-1} = f_1(C(x_p), x^m). \tag{34}$$

Далее, подставляя полученные зависимости в уравнение:

$$\frac{dx^m}{X^m(x)} = dt,$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, с разделяющимися переменными. Константу интегрирования следует выбрать так, чтобы выполнялось начальное условие: $x^m(0) = f_m(C(x_p), t)|_{t=0} = x_p^m$. Теперь подставляя найденную зависимость $x^m(C(x_p), t)$ в уравнения (34), получаем полное координатное описание интегральной кривой с необходимыми свойствами:

$$x^1(t) = f_1(C(x_p), x^m(C(x_p), t)), \quad \dots, \quad x^{m-1}(t) = f_{m-1}(C(x_p), x^m(C(x_p), t)),$$

$$x^m(t) = f_m(C(x_p), t).$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть $X = x\partial_y - y\partial_x$ — векторное поле на плоскости R^2 с координатами $\{x, y\}$. Уравнение характеристик

$$\frac{dy}{x} = -\frac{dx}{y} = dt$$

имеет интеграл $x^2 + y^2 = C = \mathrm{const}$. Он описывает семейство окружностей различных радиусов $R = \sqrt{C}$. Если $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то $C = x_0^2 + y_0^2$ и

$$x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\cos t; \quad y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\sin t.$$

Очевидно, что семейство интегральных кривых векторного поля X можно рассматривать как отображение $\phi_X\colon \mathcal{M} \times R \to \mathcal{M}$, которое каждую точку $p \in \mathcal{M}$ смещает вдоль интегральной кривой, проходящей через эту точку, причем при $t = 0$ это отображение является тождественным:

$$\phi_X : p \mapsto \phi_X(p, t), \quad \phi_X(p, 0) = p$$

и при этом

$$(\phi_X)_*(p, d/dt) = X_p.$$

Отображение ϕ_X называется *потоком векторного поля* X на многообразии $\mathcal{M}$. В силу общих теорем существования и единственности в некоторой окрестности любой неособой точки гладкого векторного поля (т.е. точки, в которой $X \neq 0$) поток ϕ_X является диффеоморфизмом. В окрестности особых точек векторного поля диффеоморфность отображения ϕ_X может нарушаться.

Мы показали, что всякое гладкое (на самом деле достаточно непрерывности!) векторное поле определяет поток на многообразии. Покажем, что всякому потоку на многообразии, понимаемому как гладкое отображение $\phi\colon \mathcal{M} \times R \to \mathcal{M}$, соответствует векторное поле, которое его порождает. Действительно, рассмотрим векторное поле:

$$X_\phi(p) \equiv (\phi)_*(p, d/dt)|_{t=0}.$$

В каждой точке многообразия, где определен поток, это поле определено и его линии потока являются интегральными кривыми векторного поля X_ϕ по определению (30). Таким образом, *существует* *взаимно-однозначное соответствие между векторными полями и потоками на гладком многообразии.*

Рассмотрим в качестве примера поток на плоскости, задаваемый в координатах соотношениями:

$$x'(x,y,t) = (t+1)x; \quad y'(x,y,t) = \frac{y}{t+1}.$$

Соответствующее векторное поле получается дифференцированием этих соотношений по t и приравниванием t к нулю. В результате будем иметь:

$$X = x\partial_x - y\partial_y.$$

Попробуйте изобразить это векторное поле стрелками на плоскости самостоятельно. Такой поток осуществляет гиперболические (псевдоевклидовы) вращения плоскости.

8. Производная Ли и ее свойства

Введенные выше конструкции дифференциала и кодифференциала отображения позволяют с каждым потоком ассоциировать операцию дифференцирования вдоль потока, определяемую, как уже говорилось, независимо от существования каких-либо геометрических структур на многообразии. Пусть на многообразии $\mathcal{M}$ задано тензорное поле $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M})$ и пусть ϕ — поток векторного поля X.

Производная Ли $(L_X T)_p$ тензорного поля T вдоль векторного поля X в точке p определяется соотношением:

$$(L_X T)_p \equiv \lim_{t \to 0} \frac{(\phi^t)^{-1}_{(r,s)}(T_{\phi^t(p)}) - T_p}{t}, \tag{35}$$

где $(\phi^t)^{-1}_{(r,s)}$ — обратный (r,s)-дифференциал отображения ϕ (ф-ла (29)), вычисленный в точке $\phi^t(p)$.

Рисунок 8.1 поясняет данное определение. Через точку p проходит некоторая интегральная кривая потока ϕ, генерируемого векторным полем X. Смещаясь вдоль нее из точки p на параметрическое расстояние t, мы попадаем в точку $\phi^t(p)$. В этой точке мы наблюдаем тензор

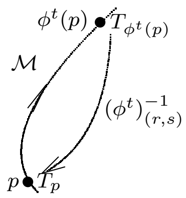

Рис. 8.1: К определению производной Ли.

$T_{\phi^t(p)}$, который мы напрямую не можем сравнить с тензором T_p в исходной точке, поскольку эти тензоры отнесены к разным точкам многообразия и разным базисам. Но посредством обратного (r,s)-дифференциала $(\phi^t)^{-1}_{(r,s)}$ мы можем перенести тензор $T_{\phi^t(p)}$ обратно в точку p и сравнить результат с исходным тензором T_p. Разделив разность перенесенного и исходного тензоров в точке p на t и переходя к пределу при $t \to 0$, получаем производную Ли, которая, таким образом, имеет смысл *скорости изменения тензора T вдоль потока ϕ.*

Данное безкоординатное определение производной Ли позволяет доказать ряд основных ее общих свойств.

1. Если $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M})$, то и $L_X T \in \mathcal{T}^{(r,s)}(\mathcal{M})$.

2. Производная Ли R-линейна по обоим аргументам, т.е.

$$L_X(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) = \lambda_1 L_X T_1 + \lambda_2 L_X T_2$$

и

$$L_{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2}(T) = \lambda L_{X_1} T + \lambda_2 L_{X_2} T.$$

3. Производная Ли удовлетворяет правилу Лейбница по отношению к тензорному произведению:

$$L_X(T_1 \otimes T_2) = (L_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes L_X(T_2).$$

4. Производная Ли коммутирует со сверткой:

$$C L_X T = L_X(CT).$$

В перечисленных выше свойствах T — произвольное тензорное поле произвольной валентности, T_1, T_2 — произвольные тензорные поля произвольных одинаковых валентностей в свойстве 2 и произвольных валентностей в свойстве 3, λ_1, λ_2 — произвольные вещественные числа.

Свойство 1 вытекает непосредственно из определения (сумма и разность пары тензоров есть тензор того же типа). Свойство 2 для верхнего (тензорного) аргумента вытекает из линейности (r,s)-дифференциала и предела. Однородность производной Ли по нижнему (векторному) аргументу можно легко доказать, заметив, что замена $X \to \lambda X$ "компенсируется" переопределением параметра t потока:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda X \Leftrightarrow \frac{dx}{d\tau} = X,$$

где $\tau = \lambda x$. Другими словами, поток векторного поля X по отношению к параметру $\tau = \lambda t$ таков же, каков поток векторного поля λX по отношению к параметру t. Таким образом, имеет место равенство:

$$\frac{(\phi^t_{\lambda X})^{-1}_{(r,s)} T_{\phi^t_{\lambda X}(p)} - T_p}{t} = \lambda \frac{(\phi^{\lambda t}_X)^{-1}_{(r,s)} T_{\phi^{\lambda t}_X(p)} - T_p}{\lambda t} = \lambda \frac{(\phi^{\tau}_X)^{-1}_{(r,s)} T_{\phi^{\tau}_X(p)} - T_p}{\tau},$$

откуда после перехода к пределу при $\tau \to 0$ и следует доказываемое свойство:

$$L_{\lambda X} T = \lambda L_X T.$$

Для доказательства второй части свойства 2 для нижнего (векторного) аргумента производной Ли достаточно заметить, что с точностью до $o(t)$ потоки ϕ_{X_1} и ϕ_{X_2} коммутируют (см. ниже геометрическую интерпретацию скобки Ли и теорему 1 в этом параграфе), при этом $\phi^t_{X_1+X_2} = \phi^t_{X_1} \circ \phi^t_{X_2} + o(t)$. Используя это обстоятельство в определении (35), приходим к цепочке равенств:

$$L_{X_1+X_2} T \equiv \lim_{t\to 0} \frac{(\phi^t_{X_1+X_2})^{-1} T_{\phi^t_{X_1+X_2}t(p)} - T_p}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} (\phi^t_{X_2})^{-1}((\phi^t_{X_1})^{-1} T_{\phi^t_{X_1}(p)})_{\phi^t_{X_2}(p)} - (\phi^t_{X_1})^{-1}(T_{\phi^t_{X_1}(p)})$$

$$+(\phi^t_{X_1})^{-1}(T_{\phi^t_{X_1}(p)}) - X_p + o(t^2))/t =$$

$$L_{X_2}\lim_{t\to 0}(\phi^t_{X_1})^{-1}(T_{\phi^t_{X_1}(p)})+L_{X_1}T=L_{X_1}T+L_{X_2}T,$$

что и требовалось доказать. Во второй и третьей строчках мы добавили и вычли в числителе тензор $(\phi^t_{X_1})^{-1}T_{\phi^t_{X_1}(p)}$ в точке $\phi^t(p)$, в последней строчке мы воспользовались непрерывностью потока и равенством $\phi^0_X=\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$.

Доказательство правила Лейбница основано на ступенчатой конструкции, использованной в доказательстве предыдущего свойства. Имеем цепочку равенств:

$$L_X(T_1\otimes T_2)\equiv\lim_{t\to 0}\frac{\phi^{-1}_{(r,s)}(T_1\otimes T_2)_{\phi^t(p)}-(T_1\otimes T_2)_p}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}(\phi^{-1}_{(r_1,s_1)}(T_1)_{\phi^t(p)}\otimes\phi^{-1}_{(r_2,s_2)}(T_2)_{\phi^t(p)}-\phi^{-1}_{(r_1,s_1)}(T_1)_{\phi^t(p)}\otimes(T_2)_p$$

$$+\phi^{-1}_{(r_1,s_1)}(T_1)_{\phi^t(p)}\otimes(T_2)_p-(T_1)_p\otimes(T_2)_p)/t=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\phi^{-1}_{(r_1,s_1)}(T_1)_{\phi^t(p)}\otimes(\phi^{-1}_{(r_2,s_2)}(T_2)_{\phi^t(p)}-(T_2)_p)}{t}+$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\phi^{-1}_{(r_1,s_1)}(T_1)_{\phi^t(p)}-(T_1)_p\otimes(T_2)_p)\otimes(T_2)_p}{t}=$$

$$=T_1\otimes L_XT_2+L_XT_1\otimes T_2,$$

что и требовалось доказать. Здесь $T_1\in\mathcal{T}^{(r_1,s_1)}(\mathcal{M})$, $T_2\in\mathcal{T}^{(r_2,s_2)}(\mathcal{M})$, $r=r_1+r_2$, $s=s_1+s_2$.

Докажем, наконец, коммутируемость производной Ли с однократной сверткой (коммутируемость кратной свертки доказывается вполне аналогично). Используя определение свертки (15) имеем:

$$L_X(CT)=\lim_{t\to 0}\frac{\phi^{-1}_{(r-1,s-1)}(CT)_{\phi^t(p)}-(CT)_p}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\phi^{-1}_{(r,s)}(T_{\phi^t(p)})(\ldots,(\partial_\alpha)_p,\ldots,dx^\alpha_p,\ldots)-T_p(\ldots,(\partial_\alpha)_p,\ldots,dx^\alpha_p,\ldots)}{t}=$$

$$\left[\lim_{t\to 0}\frac{\phi^{-1}_{(r,s)}(T)_{\phi^t(p)}-T_p}{t}\right](\ldots,(\partial_\alpha)_p,\ldots,dx^\alpha_p,\ldots)=$$

$$C\lim_{t\to 0}\frac{\phi^{-1}_{(r,s)}(T)_{\phi^t(p)}-T_p}{t}=CL_XT.$$

Сделаем несколько замечаний.

1. С точки зрения абстрактной алгебры производная Ли является элементом алгебры дифференцирований тензорной алгебры $\mathcal{T}(\mathcal{M})$, сохраняющим ее $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-градуировку. Примерами дифференцирований тензорной алгебры, не сохраняющих градуировку, являются ковариантная производная и внешний дифференциал (повышают левую компоненту градуировки на единицу) и сопряженный к d дифференциал δ (понижает левую компоненту градуировки на единицу). Разумеется d и δ определены лишь на внешней подалгебре $\Lambda(\mathcal{M})\subset\mathcal{T}(\mathcal{M})$.

2. Производная Ли R-линейна, но не $\mathfrak{F}$-линейна. Это означает, что, например, отображение $\mathfrak{V}(\mathcal{M})\times\mathfrak{V}(\mathcal{M})\to\mathfrak{V}(\mathcal{M})$, которое определяет производная Ли: $L_XY=Z$ не является тензором типа $(2,1)$ (аналогично и для производных Ли тензоров высших валентностей).

9. Координатные формулы для производной Ли

Выведем теперь координатные формулы для производных Ли тензоров различных валентностей. В процессе вывода нам потребуется полезное разложение координатного представления потока ϕ^t в окрестности $t=0$ с начальной точкой p:

$$x(t)=x(0)+\dot{x}(0)t+\ddot{x}(0)\frac{t^2}{2}+o(t^2)=x_p+X_pt+X(X)_p\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad (36)$$

где в последнем равенстве учтены начальные условия, уравнение потока (31) и его дифференциальное следствие:

$$\ddot{x}(0)=\frac{d}{dt}X_p|_{t=0}=\frac{\partial X}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha|_{t=0}=\left.\frac{\partial X}{\partial x^\alpha}X^\alpha\right|_p=X(X)_p.$$

Для компонент дифференциала отображения ϕ^t_* и для обратного $(\phi^t_*)^{-1}$ имеем с точностью до $o(t)$:

$$(\phi^t_*)^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta+\left.\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_p t+o(t);\quad (\phi^t_*)^{-1}{}^\alpha_\beta\approx(\phi^{-t}_*)^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta-\left.\frac{\partial X^\alpha_p}{\partial x^\beta}\right|_p t+o(t)$$

(37)

или в безындексной форме:

$$(\phi^t_X)_p = \mathrm{id}_p + (\partial X)_p t + o(t); \quad (\phi^t_X)^{-1}_p = \mathrm{id}_p - (\partial X)_p t + o(t).$$

Взаимная обратность приведенных матриц с точностью до $o(t)$ проверяется непосредственным вычислением.

Для скалярной функции $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ определение (35) дает:

$$L_X f(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\phi^t(p)) - f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_p + tX_p + o(t)) - f(p)}{t} = \quad (38)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p) + tX_p(f) + o(t) - f(p)}{t} = X_p(f).$$

Таким образом, *производная Ли вдоль X от скалярной функции совпадает с дифференцированием этой функции вдоль X.*

Пример. Условие $L_X f = X(f) = 0$ для некоторого заданного векторного поля определяет такую функцию f, у которой поверхности уровня сотканы из интегральных кривые векторного поля X. Действительно, записанное равенство на инфинитиземальном языке выражает в точности тот факт, что при смещениях вдоль потока векторного поля X функция f сохраняет свое значение. Но это и означает, что при движении вдоль потока мы всегда остаемся на некоторой поверхности уровня этой функции. Наоборот, при заданной функции f это уравнение определяет векторное поле, касательное к поверхностям уровня данной функции. Например, для функции $f = f(x^2+y^2)$ на R^2 всякое векторное поле, удовлетворяющее уравнению $L_X f = 0$, имеет вид $X = Ax\partial_y - Ay\partial_x$, где A — произвольная функция. Это поле является касательным к семейству концентрических окружностей $x^2 + y^2 = R^2$, представляющих собой семейство линий уровня f. $\square$

Для векторного поля $X \in \mathfrak{V}(\mathcal{M})$ определение (35) с учетом (36) и (37) приводит к цепочке равенств:

$$L_X Y_p = \lim_{t\to 0} \frac{\phi^{-1}_*(Y_{\phi^t(p)}) - Y_p}{t} = \quad (39)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(\mathrm{id} - (\partial X)_p t + o(t)) \cdot (Y_p + X(Y)_p t + o(t)) - Y_p}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{X(Y)_p t - Y(X)_p t + o(t)}{t} = [X,Y]_p,$$

где $\cdot$ означает обычное матричное умножение. Таким образом, *производная Ли векторного поля Y вдоль векторного поля X совпадает с формально введенной ранее скобкой Ли* $[X,Y]$. В координатах производная Ли $L_X Y$ выражается формулой (4). В силу установленных ранее свойств скобки Ли имеют место формулы:

$$L_X Y = -L_Y X; \quad [L_X, L_Y]Z = L_{[X,Y]}Z. \tag{40}$$

Последнее равенство является прямым следствием тождества Якоби и справедливо не только на векторных полях но и на тензорах T произвольной валентности: $[L_X, L_Y]T = L_{[X,Y]}T$.

Пример. Пусть на многообразии $\mathcal{M}$ заданы два векторных поля X и Y и пусть их потоки задаются отображениями ϕ_X и ϕ_Y соответственно. Говорят, что *потоки ϕ_X и ϕ_Y коммутируют,* если

$$(\phi_X^t \circ \phi_Y^s)(p) = (\phi_Y^s \circ \phi_X^t)(p) \tag{41}$$

для всех $t \in R$ и $s \in R$ и для всякой $p \in \mathcal{M}$. Имеет место замечательная теорема.

Теорема 1. Следующие три утверждения эквивалентны:

1) Потоки ϕ_X и ϕ_Y коммутируют;

2) Семейства интегральных кривых векторных полей X и Y инвариантны относительно действия потоков ϕ_Y и ϕ_X соответственно;

3) Скобка Ли $[X,Y]=0$.

Доказательство. Доказательство проведем по схеме $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

$1 \to 2$. Докажем, что интегральные кривые векторного поля X переводятся потоком ϕ_Y друг в друга. Отображение $\phi_X^t(p)$ при различных t можно рассматривать как интегральную кривую (или ее часть) векторного поля X, проходящую через точку p. Тогда отображение $\phi_Y^s \circ \phi_X^t$ при фиксированном s — это отображение интегральной кривой ϕ_X^t в некоторую новую кривую (увлеченную потоком ϕ_Y). Условие коммутативности потоков (41) утверждает, что полученная кривая совпадает с кривой $\phi_X^t \circ \phi_Y^s(p)$, которая при фиксированном s по определению является интегральной кривой векторного поля X, проходящей через точку $\phi_Y^s(p)$. Аналогично доказывается отображение друг в друга интегральных кривых поля Y друг в друга потоком ϕ_X.

$2 \to 3$. Пусть интегральные кривые поля X переводятся потоком ϕ_Y друг в друга. При малых t и s отображения ϕ_X^t и ϕ_Y^s в окрестности некоторых точек $p \in \mathcal{M}$ и $q \in \mathcal{M}$ имеют вид:

$$x(t) = x(p) + tX_p + o(t); \quad x(t) = x(q) + sY_q + o(s).$$

Произвольная точка $x(t) = x(p) + tX_p + o(t)$ интегральной кривой $\phi_X^t(p)$ под действием потока ϕ_Y^s перейдет в точку:

$$x_s(t) = x(p) + tX_p + sY_{x(p)+tX_p+o(t)} + o(s) = \tag{42}$$

$$x(p) + tX_p + sY_p + stX(Y)_p + so(t) + o(s).$$

С другой стороны, из условия того, что интегральная кривая $\phi_X^t(p)$ переводятся потоком ϕ_Y в интегральную кривую $\phi_X^t \circ \phi_Y^s(p)$ имеем:

$$x_s(t) = x_s(0)+tX_{x_s(0)}+o(t) = x(p)+sY_p+tX_p+stY(X)_p+to(s)+o(t). \tag{43}$$

Приравнивая (42) и (43), получаем в порядке st требуемое равенство: $X(Y)_p = Y(X)_p \Rightarrow [X,Y]_p = 0$.

$3 \to 1$. Как уже было отмечено выше, $\phi_Y^s \circ \phi_X^t(p)$ — кривая, проходящая, через точку $\phi_X^t(p)$. В силу того, что $[X,Y] = -L_Y X = 0$, поток ϕ_Y^s по смыслу производной Ли переводит векторное X в себя. В частности, он переносит касательное к кривой $\phi_X^t(p)$ векторное поле $X|_{\phi_X^t(p)}$ в векторное поле $X|_{\phi_Y^s\circ\phi_X^t(p)}$, которое будет касательным к кривой $\phi_Y^s \circ \phi_X^t(p)$, в силу того, что

$$X|_{\phi_Y^s\circ\phi_X^t(p)} = (\phi_Y^s)_* X|_{\phi_X^t(p)} = (\phi_Y^s)_* \circ (\phi_X^t)_*(d/dt) = (\phi_Y^s \circ \phi_X^t)_*(d/dt).$$

Таким образом, отображение $\phi_Y^s \circ \phi_X^t(p)$ переводит интегральную кривую в интегральную кривую и, в частности, точку p смещает в конечную точку интегральной кривой $\phi_X^t(p)$, а затем переводит ее в конечную точку интегральной кривой $\phi_Y^s \circ \phi_X^t(p)$, проходящей через точку $\phi_Y^s(p)$. Отображение $\phi_X^t \circ \phi_Y^s(p)$ переводит точку p в точку $\phi_Y^s(p)$, а затем смещает ее вдоль интегральной кривой $\phi_X^t \circ \phi_Y^s(p)$ поля X. Но по локальной теореме единственности интегральная кривая векторного поля, проходящая через некоторую точку, единственна. Следовательно, $\phi_Y^s \circ \phi_X^t(p) = \phi_X^t \circ \phi_Y^s(p)$. $\Box$

Производную Ли 1-формы $\omega \in \mathfrak{V}^*(\mathcal{M})$ можно вычислить теперь, опираясь на производную Ли векторного поля, правило Лейбница и коммутируемость со сверткой. Учитывая, что значение $\omega(Y)$ на произвольном векторном поле Y есть скаляр, имеем цепочку равенств:

$$L_X\omega(Y) = X\omega(Y) = (L_X\omega)(Y) + \omega(L_XY) = (L_X\omega)(Y) + \omega([X,Y]),$$

откуда

$$(L_X\omega)(Y) = X\omega(Y) - \omega([X,Y]).$$

Легко проверить, что левая часть зависит от Y $\mathfrak{F}-$линейно и следовательно, как и должно быть, сама производная Ли $L_X(\omega)$ является 1-формой. Явное вычисление в координатах приводит к формуле:

$$(L_X\omega)_\alpha = X^\beta\partial_\beta\omega_\alpha + \omega_\beta\partial_\alpha X^\beta. \tag{44}$$

Пример. Вычислим для будущих целей производную Ли один формы $\omega \in \mathfrak{V}^*(R^2)$ следующего вида:

$$\omega = dy - f(x,y)\,dx.$$

Результат вычислений по формуле (44) имеет вид:

$$(L_X\omega)_1 = -X^\alpha\partial_\alpha f - f\partial_1X^1 + \partial_1X^2; \quad (L_X\omega)_2 = -f\partial_2X^1 + \partial_2X^2.\Box \tag{45}$$

Аналогичным образом поступим и для определения координатных формул производной Ли произвольного тензора $T \in \mathcal{T}^{r,s}(\mathcal{M})$. В силу правила Лейбница и коммутируемости со сверткой имеем:

$$L_X(T(X_1,\ldots,X_r,\omega_1,\ldots,\omega_s)) = X(T(X_1,\ldots,X_r,\omega_1,\ldots,\omega_s)) =$$

$$(L_XT)(X_1,\ldots,X_r,\omega_1,\ldots,\omega_s) + T([X,X_1],\ldots,\omega_s) + \cdots + T(X_1,\ldots,L_X\omega_s),$$

откуда

$$(L_XT)(X_1,\ldots,X_r,\omega_1,\ldots,\omega_s) =$$

$$X(T(X_1,\ldots,X_r,\omega_1,\ldots,\omega_s)) - T([X,X_1],\ldots,\omega_s) + \cdots + T(X_1,\ldots,L_X\omega_s),$$

где все производные Ли в правой части уже определены и легко проверяется, что правая часть $\mathfrak{F}$-линейна по всем своим аргументам, за исключением X. Явное вычисление в координатах приводит к выражению:

$$(L_X T)^{\beta_1\dots\beta_s}_{\alpha_1\dots\alpha_r} = X(T^{\beta_1\dots\beta_s}_{\alpha_1\dots\alpha_r}) - \partial_{\alpha_1} X^\alpha T^{\beta_1\dots\beta_s}_{\alpha\dots\alpha_r} - \dots - \partial_{\alpha_r} X^\alpha T^{\beta_1\dots\beta_s}_{\alpha_1\dots\alpha} + \quad (46)$$

$$\partial_\beta X^{\beta_1} T^{\beta\dots\beta_s}_{\alpha_1\dots\alpha_r} + \dots + \partial_\beta X^{\beta_s} T^{\beta_1\dots\beta}_{\alpha_1\dots\alpha_r}.$$

Пример. Вычислим для будущих целей производную Ли $L_X g$ ковариантного симметричного тензора $g \in \mathcal{T}^{(2,0)}(\mathcal{M})$. Результат вычислений по формуле (46) принимает вид:

$$(L_X g)_{\alpha\beta} = X(g_{\alpha\beta}) + \partial_\alpha X^\gamma g_{\gamma\beta} + \partial_\beta X^\gamma g_{\alpha\gamma}. \quad (47)$$

Можно было бы стартовать с разложения $g = g_{\alpha\beta}(dx^\alpha \otimes dx^\beta)$. С учетом правила Лейбница и формулы $L_X(dx^\alpha) = \partial_\beta X^\alpha dx^\beta$, вытекающей из (44), приходим к тому же выражению (47). □

10. Применения производной Ли (1): интегрирование дифференциальных уравнений.

В настоящих лекциях мы не ставим своей целью дать исчерпывающий обзор методов и результатов, связанных с дифференциально-геометрическим подходом к интегрированию дифференциальных уравнений. Основная цель настоящего параграфа проиллюстрировать основную идею этого подхода на некоторых простых примерах. Систематическое изложение этих вопросов читатель может найти в обзорной статье [18] или в известных классических книгах [19, 20, 21].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (48)$$

Его решение — это зависимость $y(x)$, которая превращает это уравнение в тождество. Геометрически на плоскости (x, y) это уравнение задает *поле направлений* (рис.10.1): каждой точке (x, y) оно приписывает тангенс угла наклона искомой зависимости $y(x)$, равный $f(x, y)$.

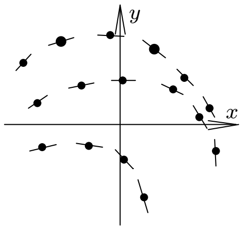

Рис. 10.1: К геометрической интерпретации дифференциальных уравнений

Таким образом, *решить дифференциальное уравнение (48), это значит по заданному полю направлений отыскать функцию $y(x)$, поле касательных прямых к которой совпадает с заданным полем направлений.* Эту же ситуацию мы можем описать на эквивалентном языке дифференциальной геометрии. Рассмотрим на плоскости R^2 векторное поле $X = \partial_1 + f(x,y)\partial_2$. Нетрудно видеть, что его интегральные кривые, являющиеся решением системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = X^1 = 1; \quad \frac{dy}{dt} = X^2 = f(x,y),$$

в точности совпадают с решениями системы (48). Этот факт можно выразить условием:

$$\omega(X) = 0, \tag{49}$$

где $\omega = dy - f(x,y)dx$ — 1-форма, ассоциированная с дифференциальным уравнением (48). По сути уравнение (49) выражает факт принадлежности векторного поля X ядру 1-формы ω: $X \in \ker\omega$, где $\ker\omega$ и есть поле направлений дифференциального уравнения (48). В каждой точке $\ker\omega_p$ — это одномерное подпространство касательного пространства T_pR^2. Формально ω — это уравнение (48), переписанное в дифференциалах. Наша геометрическая интерпретация как раз и проясняет, что стоит за формальными манипуляциями с дифференциалами.

Пока мы только переформулировали проблему с аналитического языка на геометрический. Теорема локального существования и единственности, которая обычно доказывается на аналитическом языке (с помощью ломаной Эйлера или метода сжимающих отображений) гарантирует нам при некоторых достаточно общих ограничениях на правую часть, что в окрестности некоторой начальной точки решение (интегральная кривая потока векторного поля X) существует и единственно. При этом доказательство теоремы неконструктивно: оно в общем случае не дает ключа к отысканию этого единственного решения. Оказывается, геометрическая формулировка задачи допускает регулярный метод отыскания решений, который в частности, объясняет "механизм работы" всех широко известных приемов интегрирования определенных классов дифференциальных уравнений.

Векторное поле Y называется симметрией дифференциального уравнения (48), если ассоциированная с ним 1-форма ω удовлетворяет соотношению:

$$L_Y\omega = \lambda\omega, \tag{50}$$

где λ — некоторая скалярная функция на R^2.

С геометрической точки зрения условие симметрии (50) означает, что поток ϕ_Y переводит поле направлений в себя, т.е. сохраняет ядро $\ker\omega$. При этом, если $\lambda = 0$, то ядро в точности переходит в ядро без всяких изменений. Если же $\lambda \neq 0$, то ядро переходит в ядро, но при этом векторы из ядра могут испытывать растяжение или сжатие. Очевидно, что поле направлений дифференциального уравнения при таких растяжениях или сжатиях не меняется и дифференциальное уравнение как геометрический объект остается неизменным.

Предположим, что мы каким-то образом отыскали симметрию Y для дифференциального уравнения (48). Может иметь место два случая. В первом $\omega(Y) = 0$, т.е. симметрия осуществляет поток вдоль решений и следовательно сама является решением. Очевидно, что отыскание такой симметрии по-существу сводится к отысканию решения и потому не может упростить задачу интегрирования. Во-втором случае $\omega(Y) \neq 0$, т.е. поток симметрии трансверсален к интегральным кривым потока решений. Если при этом задача отыскания такой симметрии оказывается проще, чем задача непосредственного интегрирования исходного уравнения, то используя найденную симметрию можно легко построить интеграл уравнения (48). В общем случае он будет представлять собой неявную функцию $y(x)$, задаваемую соотношением вида $F(x, y) = \mathrm{const}$.

Идея построения такого интеграла в рассматриваемом нами случае заключается в следующем. Интегральные кривые поля симметрии Y отмечают на плоскости R^2 линии, двигаясь вдоль которых дифференциальное уравнение переходит в себя в указанном выше смысле. Другими словами, если ввести на плоскости новую систему координат, в которой одним из двух семейств координатных линий будут линии векторного поля Y, то в дифференциальном уравнении (48) зависимость от этой координаты должна исчезнуть. При этом само уравнение превратится в уравнение с разделяющимися переменными вида

$$\frac{dy'}{dx'} = f(y') \quad \text{или} \quad \frac{dy'}{dx'} = f(x').$$

Практически, решая уравнения характеристик для векторного поля Y, мы будем иметь интеграл вида $g(x, y) = \mathrm{const}$, описывающий семейство его интегральных кривых. В качестве новой координаты u на плоскости R^2 и следует принять эту комбинацию: $u = g(x, y)$.

Проиллюстрируем описанную выше идею на конкретном примере.

Пример. Рассмотрим уравнение вида (48) с правой частью $f(x, y) = \varphi(y/x)$. Непосредственной проверкой по формулам (45) убеждаемся, что $L_Y\omega = \omega$, где $Y = x\partial_1 + y\partial_2$, $\omega = dy - \varphi(y/x)\,dx$. Следовательно Y — поле симметрий, при этом $\omega(Y) \neq 0$. Интеграл уравнения характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

имеет вид $y/x = \mathrm{const}$. После введения новой переменной $u = y/x$, исходное дифференциальное уравнение преобразуется к виду:

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u),$$

для которого возможно разделение переменных:

$$\ln x + C = \int \frac{du}{f(u) - u}.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть случай обобщенно-однородных уравнений вида (48), у которых

$$f(x, y) = \frac{y}{x}\varphi(y^\alpha/x^\beta),$$

где α и β — произвольные вещественные числа. Соответствующий интеграл уравнений характеристик векторного поля симметрии имеет вид:

$$u = y^\alpha / x^\beta = \text{const}.\square$$

Сделаем в конце этого раздела несколько замечаний.

1. Процедура отыскания симметрий оказывается далеко не всегда проще процедуры отыскания решения самого уравнения. Так, например, обстоит дело с общим уравнением Риккати: $y' = \varphi_2(x)y^2 + \varphi_1(x)y + \varphi_0(x)$. В этом смысле симметрийный подход не является универсальным. Однако всем случаям разделения переменных в дифференциальном уравнении соответствует существование поля (или полей) симметрии Y.

2. В случае когда $\omega(Y) \neq 0$ имеет место следующая теорема:

   `1-форма` ω`, ассоциированная с уравнением (48), допускает интегрирующий множитель вида` $1/\omega(Y)$`. Другими словами, 1-форма` $\Omega = \omega/\omega(Y)$ `является в этом случае "полным дифференциалом"` dF `некоторой функции` F`.`

   Справедливость этой теоремы можно проверить непосредственно, вычислив величину $\partial_1\Omega_2 - \partial_2\Omega_1$ и убедившись, что она равна нулю в силу уравнений для поля симметрии Y. Более компактное доказательство, не связанное с переходом к координатам, заключается в применении аппарата внешних дифференциальных форм и теоремы Фробениуса (см. [21]).

3. Обсуждаемые здесь идеи допускают непосредственное обобщение на дифференциальные уравнения высших порядков и уравнения в частных производных. Обобщением формы ω выступает в этих случаях *распределение Картана в соответствующем расслоении джетов* [21].

4. Если у дифференциального уравнения есть несколько симметрий, то они образуют *алгебру симметрий* относительно скобки

Ли. Действительно, пусть $L_Y\omega = \lambda_1\omega$ и $L_Z\omega = \lambda_2\omega$. В силу свойства (40) имеет место следующая цепочки равенств:

$$L_{[Y,Z]} = (L_Z L_Y - L_Y L_Z)\omega = L_Z(\lambda_1\omega) - L_Y(\lambda_2\omega) = (Z(\lambda_1) - Y(\lambda_2))\omega,$$

откуда следует, что скобка Ли $[Y, Z]$ двух симметрий есть снова симметрия. В некоторых случаях получающаяся симметрия $[Y, Z]$ будет новой, т.е. независимой от Y и Z. Знаменитая теорема Ли гласит: Для полного интегрирования дифференциального уравнения порядка n достаточно существования $n-1$ полей симметрий (n - порядок уравнения), которые образуют разрешимую алгебру Ли [19, 21].

11. Применения производной Ли (2): тензор деформаций и изометрии многообразия

В этом и последующих разделах мы рассмотрим основную область применения производных Ли в геометрии. Речь пойдет об отыскании изометрий различных метрик. Напомним несколько предварительных определений.

Римановой метрикой g на многообразии $\mathcal{M}$ называется симметричное невырожденное положительно-определенное гладкое тензорное поле типа $\mathcal{T}^{(2,0)}(\mathcal{M})$.

Значение $g(X, Y)$ определяет скалярную функцию на $\mathcal{M}$, которая в каждой точке p определяет *скалярное произведение* векторов X_p и Y_p. На языке скалярного произведения свойства метрики, перечисленные в определении, формулируются следующим образом:

1. $g(X, Y) = g(Y, X)$ (симметричность);
2. $g(X, Y) = 0$ для всех $Y \Leftrightarrow X \equiv 0$ (невырожденность);
3. $g(X, X) \geq 0$ для всех X (равенство только для $X = 0$) (положительная определенность);
4. Если $X \in \mathfrak{V}(\mathcal{M})$ и $Y \in \mathfrak{V}(\mathcal{M})$, то $g(X, Y) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ (гладкость).

В теории относительности для отражения причинной структуры пространства-времени необходимо отказаться от условия положительной определенности метрики. Метрика g, удовлетворяющая условиям 1,2,4, называется *псевдоримановой*.

Введение метрики на многообразии позволяет изучать его локальную внутреннюю геометрию (длины, углы, параллельный перенос). Например, длина[6] $|X_p|$ вектора X_p и угол $\theta(X_p, Y_p)$ между ненулевыми векторами X_p и Y_p определяются по формуле:

$$|X_p| \equiv \sqrt{g(X_p, X_p)}; \quad \cos\theta(X_p, Y_p) \equiv \frac{g(X_p, Y_p)}{|X_p||Y_p|}. \tag{51}$$

Важным свойством метрики является ее поведение при различных отображениях многообразия в себя. В частности, особый интерес представляют такие преобразования многообразия, при которых метрика остается в определенном смысле неизменной. Такие преобразования (если они существуют) являются абстрактными дифференциально-геометрическими аналогами движений твердого тела в 3-мерном евклидовом пространстве, при которых расстояния между любыми парами точек этого тела остаются неизменными.

Рассмотрим диффеоморфизм φ: $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Его можно интерпретировать как некоторую конечную деформацию многообразия так, как если бы многообразие представляло собой некоторую деформируемую сплошную среду.

Тензорное поле

$$u \equiv \frac{1}{2}((\varphi)^* g - g) \tag{52}$$

называется тензором конечных деформаций метрики g при диффеоморфизме φ.

Этот тензор, будучи определенным для любой точки $p \in \mathcal{M}$, определяет в ней "степень деформации" метрики. Числовые характеристики этой деформации мы получим, если рассмотрим значения u на элементах какого-нибудь ортонормированного репера $\{e_\alpha(p)\}$ в точке

[6]Для избежания недоразумений, везде где не оговорено особо, мы рассматриваем риманову метрику.

p и применим формулы (51). Так, $u(e_\alpha(p), e_\alpha(p)) \equiv u_{\alpha\alpha}(p)$ будет описывать относительное изменение ϵ_α длины в направлении $(\varphi)_*(e_\alpha)$ в точке $\varphi(p)$ по формуле:

$$\epsilon_\alpha = \sqrt{1 + 2u_{\alpha\alpha}(p)} - 1.$$

Эта формула отнесена к системе координат в точке p. Аналогично, недиагональные компоненты $u_{\alpha\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$ описывают деформации углов в плоскостях (e_α, e_β) по формуле:

$$\cos\theta'_{\alpha\beta}(p) = \frac{u_{\alpha\beta}(p)}{(1+\epsilon_\alpha)(1+\epsilon_\beta)},$$

где θ' — угол между векторами $\varphi_*(e_\alpha(p))$ и $\varphi_*(e_\beta(p))$.

Теперь естественно ввести следующие определения.

Конечная деформация φ называется жесткой в точке p, если $u_p = 0$.

Конечная деформация φ называется изометрией метрики g на $\mathcal{M}$, если $u = 0$ на всем многообразии.

Аналогично тому, как при движении твердого тела в 3-мерном евклидовом пространстве оно в действительности занимает все промежуточные положения между начальным и конечным положениями, мы и в рассматриваемом нами абстрактном случае можем определить непрерывное семейство φ^t деформаций многообразия, параметризованное вещественным параметром t ("параметрическое время"). Очевидно, это семейство описывает некоторый поток на $\mathcal{M}$ и ему, в соответствии с материалом раздела 7, можно сопоставить векторное поле скорости X_φ. Для фиксированной точки p мы имеем семейство конечных тензоров деформаций:

$$u_p^t \equiv \frac{1}{2}((\varphi^t)^* g - g)_p. \tag{53}$$

Разделив правую часть на t, переходя к пределу при $t \to 0$ и используя определение производной Ли (35), приходим к определению *тензора скоростей деформаций*:

$$\dot{u} \equiv L_{X_\varphi} g,$$

который представляет собой инфинитиземальную версию тензора конечных деформаций.

Имеет место очевидная:

Теорема. Для того, чтобы φ^t было изометрией на $\mathcal{M}$ необходимо и достаточно, чтобы $\dot{u} \equiv 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна из определения изометрии. Пусть p — некоторая произвольная фиксированная точка и пусть X_p и Y_p — пара произвольных фиксированных векторов в ней. Рассмотрим изменение величины $g(X_p, Y_p)$ под действием потока:

$$\frac{d}{dt}g((\varphi^t)_* X_p, (\varphi^t)_* Y_p) = \frac{d}{dt}(\varphi^t)^* g(X_p, Y_p) = (L_{X_\varphi} g|_{\varphi^t(p)})(X_p, Y_p) = 0.$$

Следовательно длины и углы вдоль потока сохраняются и изометричность потока φ^t очевидна.$\square$

Таким образом, для отыскания изометрий метрики g достаточно найти множество инфинитиземальных изометрий — полей X, для которых выполняются уравнения

$$L_X g = 0. \tag{54}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Киллинга для метрики g,* а их решения X — *векторными полями Киллинга.* Отметим, что поля Киллинга образуют алгебру Ли изометрий метрики g относительно скобки Ли (доказательство аналогично доказательству пункта 4 конца прошлого раздела). Конечные изометрии будут описываться 1-параметрическими семействами интегральных кривых найденных векторных полей Киллинга.

В качестве первого простейшего примера конкретных изометрий рассмотрим изометрии евклидовой метрики g в R^n. В декартовой системе координат евклидова метрика изображается единичной матрицей, а уравнения Киллинга с учетом формул (45) принимают вид:

$$g_{\alpha\gamma}\partial_\beta X^\gamma + g_{\beta\gamma}\partial_\alpha X^\gamma = 0. \tag{55}$$

Из диагональных уравнений при $\alpha = \beta$ вытекает, что X^α не зависит от x^α. Недиагональные уравнения принимают вид:

$$\partial_\alpha X^\beta + \partial_\beta X^\alpha = 0$$

для всех пар $\alpha \neq \beta$. Дифференцируя это уравнение по x^α и учитывая, что $\partial_\alpha X^\alpha = 0$ (суммирования нет!), приходим к заключению, что $\partial^2_{\alpha\alpha} X^\beta = 0$, т.е. все X^β являются линейными функциями координат:

$$X = C \cdot x + A,$$

где C и A — числовая матрица $n \times n$ и числовой n-столбец соответственно. Уравнения Киллинга тождественно удовлетворяются, если матрица коэффициентов C антисимметрична, т.е. $C^T = -C^T$, где $\bullet^T$ — стандартная операция матричного транспонирования. Полагая поочередно все параметры в C и A кроме одного равными нулю, получаем, таким образом, что *независимыми векторными полями алгебры изометрий евклидовой метрики являются*:

$$\mathfrak{T}_n = \{\partial_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,n} \quad \text{(трансляции) и}$$

$$\mathfrak{so}(n) = \{x^\alpha \partial_\beta - x^\beta \partial_\alpha\}_{\alpha<\beta} \quad \text{(плоские вращения)},$$

где посредством $\mathfrak{T}_n$ мы обозначили *подалгебру трансляций* алгебры изометрий, а посредством $\mathfrak{so}(3)$ — подалгебру вращений. Полученный результат носит общий и исчерпывающий характер: *все непрерывные изометрии евклидовой метрики любого числа измерений исчерпываются трансляциями* $\mathfrak{T}_n$ *и вращениями* $\mathfrak{so}(n)$. *При этом* $\dim \mathfrak{T}_n = n$, $\dim \mathfrak{so}(3) = n(n-1)/2$, *где* n *— размерность многообразия с евклидовой метрикой.* Отметим, что обозначение $\mathfrak{so}(n)$ происходит из общепринятой в теории групп Ли системы обозначений: $\mathfrak{so}(n)$ является алгеброй Ли группы вращений $SO(n)$, которая получается интегрированием уравнений потоков полей из алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$ (см. пример в разделе 7). В 3-мерном случае алгебра $\mathfrak{so}(3)$ характеризуется следующей системой коммутационных соотношений:

$$[X_{(i)}, X_{(j)}] = \epsilon_{ijk} X_{(k)}. \tag{56}$$

12. Применения производной Ли (3): группа движений пространства Минковского

Аналогично предыдущему случаю вычислим алгебру изометрий плоского псевдоевклидова пространства $\mathcal{M}_{p,q}$. В декартовой системе координат эта метрика имеет наиболее простой вид:

$$g = dx^0 \otimes dx^1 + \cdots + dx^p \otimes dx^p - dy^1 \otimes dy^1 - \cdots - dy^q \otimes dy^q. \quad (57)$$

Векторное поле симметрии запишем в координатах следующим образом:

$$Z = X^\alpha(x,y)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + Y^\beta(x,y)\frac{\partial}{\partial y^\beta}, \ \alpha = 1, \ldots, p; \quad \beta = 1, \ldots, q.$$

Уравнения Киллинга с учетом формул (45) принимают вид (55) с заменой компонент евклидовой метрики на компоненты псевдоевклидовой метрики. Из диагональных уравнений при следует как и ранее, что X^α не зависит от x^α и Y^β не зависит от y^β. Недиагональные уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} = 0; \quad \frac{\partial Y^\beta}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial Y^\alpha}{\partial y^\beta} = 0; \quad \frac{\partial X^\beta}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\beta} = 0.$$

Путем дифференцирования этих уравнений с учетом условия $\partial X^\alpha/\partial x^\alpha = 0$ и $\partial Y^\beta/\partial y^\beta = 0$ (суммирования нет!) аналогично случаю евклидовой метрики приходим к заключению, что все компоненты Z являются линейными функциями координат:

$$X = B \cdot x + C \cdot y + A, \quad Y = D \cdot x + F \cdot y + G,$$

где A и G — постоянные векторы размерности p и q соответственно, B — постоянная матрица $p \times p$, C — постоянная матрица $p \times q$, D — постоянная матрица $q \times p$, F — постоянная матрица $q \times q$. Уравнения Киллинга тождественно удовлетворяются, если матрицы коэффициентов удовлетворяют следующим условиям:

$$B^T = -B; \quad F^T = -F; \quad C^T = D.$$

Таким образом, *независимыми векторными полями алгебры изометрий псевдоевклидовой метрики являются*:

$$\mathfrak{T}_{p+q} = \{\partial_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,p+q} \quad \text{(трансляции)},$$

$$\mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q) = \{x^\alpha \partial/\partial x^\sigma - x^\sigma \partial/\partial x^\alpha, y^\beta \partial/\partial y^\gamma - y^\gamma \partial/\partial y^\beta\}_{\alpha<\beta}$$

(плоские вращения) и

$$\mathfrak{b}(p,q) = \{x^\alpha \partial/\partial y^\beta + y^\beta \partial/\partial x^\gamma\}_{\alpha,\beta} \quad \text{(псевдовращения или бусты).}$$

Отметим, что бусты в общем случае не образуют подалгебры. Как и в случае евклидовой метрики полученный результат носит общий и исчерпывающий характер: *все непрерывные изометрии псевдоевклидовой метрики типа* (p,q) *исчерпываются трансляциями* $\mathfrak{T}_{p+q}$, *вращениями* $\mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q)$ *и бустами* $\mathfrak{b}(p,q)$. *При этом* $\dim \mathfrak{T} = n = p+q$, $\dim \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q) = p(p-1)/2 + q(q-1)/2$, $\dim \mathfrak{B} = pq$. Полученные результаты в частном случае $p = 1$, $q = 3$ и $p = 3$, $q = 0$ приводят к хорошо известным фактам псевдоевклидовой 4-мерной геометрии Минковского и 3-мерной евклидовой геометрии.

13. Применения производной Ли (4): изометрии римановых метрик

Рассмотрим простейшие примеры применения производной Ли в римановой геометрии. Самыми простыми неплоскими римановыми многообразиями являются т.н. *многообразия постоянной кривизны.* Рассмотрим, к примеру, 2-мерную сферу, вложенную стандартным образом в 3-мерное евклидово пространство и метрику, индуцированную на ней объемлющей евклидовой метрикой. К выражению для последней проще всего прийти, рассмотрев евклидову метрику в сферической системе координат:

$$g = dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi).$$

Переходя на единичную сферу посредством соотношения $r = 1$, получаем метрику сферы:

$$g^{(S^2)} = d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi. \qquad (58)$$

Вычислим алгебру симметрий этой метрики. Уравнения Киллинга $L_X g^{(S^2)} = 0$ записываются по формуле (45) следующим образом ($x^1 = \theta, x^2 = \varphi$):

$$\partial_\theta X^\theta = 0; \quad X^\theta + \tan\theta \partial_\varphi X_\varphi = 0; \quad \sin^2\theta \partial_\theta X^\varphi + \partial_\varphi X^\theta = 0.$$

Из первого уравнения следует, что X^θ зависит только от φ: $X^\theta = F(\varphi)$. Из второго уравнения следует, что $X^\varphi = -\cot\theta\int F\,d\varphi + \psi(\theta)$, где ψ — пока произвольная функция. Подставляя эти представления в третье уравнение, приходим к уравнению на F и ψ:

$$F' + \int F\,d\varphi + \psi'\sin^2\theta = 0.$$

Отсюда для стандартного условия разделения следует, что $\psi = D\cot\theta + C$, $\int F\,d\varphi = A\sin\varphi + B\cos\varphi + D$, где A, B, C, D — произвольные константы интегрирования. Таким образом, общее поле симметрии имеет вид:

$$X = (A\cos\varphi - B\sin\varphi)\partial_\theta - \cot\theta(A\sin\varphi + B\cos\varphi + C)\partial_\varphi. \quad (59)$$

Полагая поочередно пары коэффициентов из набора A, B, C равными нулю, приходим к следующим независимым полям симметрии сферы:

$$X_{(1)} = \cos\varphi\partial_\theta - \cot\theta\sin\varphi\partial_\varphi;\ X_{(2)} = -\sin\varphi\partial_\theta - \cot\theta\cos\varphi\partial_\varphi;\ X_{(3)} = \partial_\varphi.$$

Как и следовало ожидать из общих интуитивных соображений поля $X_{(i)}$ образуют алгебру Ли $\mathfrak{so}(3)$ 3-мерной группы вращений $SO(3)$, что проверяется непосредственной проверкой выполнимости соотношений (56).

В общей теории относительности 4-мерное пространство-время называется *сферически-симметричным*, если его метрика g имеет алгебру симметрии $\mathfrak{so}(3)$. В сферических координатах, в которых поля этой алгебры имеют вид (59), общая сферически симметричная метрика будет иметь вид:

$$g = A(t,r)dt\otimes dt - B(t,r)dr\otimes dr + f(t,r)(dt\otimes dr + dr\otimes dt) - C(t,r)g^{(S^2)}, \quad (60)$$

где A, B, C, f — произвольные функции временной и радиальной координат t и r. Пространство-время называется *сферически-симметричным статическим*, если его алгебра симметрии помимо $\mathfrak{so}(3)$ содержит еще одно времениподобное (т.е. удовлетворяющее условию $g(X,X) > 0$) векторное поле симметрии, коммутирующее с элементами алгебры $\mathfrak{so}(3)$. Используя свободу координатных преобразований:

$$t = t(\tau,\rho); \quad r = r(\tau,\rho),$$

сохраняющих общий вид метрики (60), ее всегда можно привести к виду:

$$g = \bar{A}(\tau,\rho)d\tau \otimes d\tau - \bar{B}(\tau,\rho)d\rho \otimes d\rho - \rho^2 g^{(S^2)}$$

в случае общей сферической симметрии и к виду:

$$g = \bar{A}(\rho)d\tau \otimes d\tau - \bar{B}(\rho)d\rho \otimes d\rho - \rho^2 g^{(S^2)}$$

в случае сферически-симметричного статического пространства-времени. Здесь $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — некоторые функции новых переменных τ, ρ, связанные с исходными A и B посредством тензорного закона преобразований.

Замечательным фактом эйнштейновской общей теории относительности является *существование дополнительного поля Киллинга как следствие сферической симметрии.* Другими словами, (при некоторых дополнительных предположениях: в обсуждаемом нами случае — для пустого пространства-времени) *все сферически-симметричные решения уравнений Эйнштейна автоматически являются статическими и сводятся к знаменитой метрике Шварцшильда для черной дыры* (теорема Биркгоффа):

$$g = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt \otimes dt - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr - r^2 g^{(S^2)},$$

где $r_g = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус черной дыры, связанный с ее полной массой M. Метрика черной дыры и ее следствия являются основой для современного раздела общей теории относительности — *физики черных дыр* [22].

Факт допустимости любых гладких и обратимых замен координат в общей теории относительности усложняет выявление физических свойств, вытекающих из римановой метрики пространственно-временного многообразия. В частности, может оказаться так (и часто оказывается!), что одна и та же метрика имеет совершенно различный и неузнаваемый вид в разных системах координат. Это обстоятельство можно наблюдать даже в плоском пространстве времени, переходя в нем к различным криволинейным координатам. Однако в плоском пространстве времени у нас существует класс декартовых систем координат, в которых метрика имеет стандартный и самый простой вид — это утверждение можно принять за определение плоского пространства. Для римановых метрик в общем случае не существует никаких предпочтительных систем координат и поэтому для их классификации и в частности установления их тождества или различия необходимо использовать другие методы, не связанные с координатными конструкциями. Одним из подходов к инвариантной классификации римановых метрик является их классфикация по симметриям. Поскольку уравнения Киллинга имеют общековариантный тензорный характер, то поля симметрий имеются или отсутствуют независимо от выбора системы координат и (при их наличии) их алгебра должна быть одной и той же в разных системах координат с точностью до линейных замен базиса в алгебре симметрий. Таким образом, *для того чтобы две метрики были эквивалентны, (т.е. чтобы они переводились друг в друга преобразованием координат) необходимо, чтобы их алгебры симметрий совпадали.* Иногда, когда алгебра симметрий является достаточно богатой, это условие является и достаточным, иногда требуется привлекать для сравнения другие инвариантные свойства многообразия (например алгебраические типы тензоров Вейля и Риччи).

Симметрийный подход часто кладут в основу определения того или иного пространства-времени. Этот метод работает даже в тех случаях, когда физический смысл получающейся геометрии (т.е. ее возможные материальные источники и их свойства) не ясен. Идею "симметрийного конструктора" мы проиллюстрируем на следующем примере. Пусть нас интересует пространство-время, обладающее следующей алгеброй симметрий:

$$X_{(0)} = \partial_t,\ X_{(1)} = \partial_x,\ X_{(2)} = \partial_y,\ X_{(3)} = \partial_x + y\partial_y + \frac{1}{2}(\sqrt{3}t - z)\partial_z - \frac{1}{2}(t + \sqrt{3}z)\partial_t.$$

Мы могли прийти к такой алгебре из каких-то совершенно посторонних к ОТО соображений или даже рассмотреть ее "просто так" из любопытства. Другими словами, нас интересует решение системы уравнений Киллинга:

$$L_{X_{(i)}}g = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

но теперь уже не относительно компонент полей $X_{(i)}$ — ведь они нам известны заранее, — а относительно компонент метрики. Если наложить дополнительное требование, чтобы искомая метрика удовлетворяла уравнениям Эйнштейна в пустоте, то оказывается (проверка в принципиальном плане не сложна, но громоздка), искомая метрика единственна и имеет вид:

$$g = k^2[e^x(\cos\sqrt{3}x(dt\otimes dt - dz\otimes dz) + \sin\sqrt{3}x(dt\otimes dz + dz\otimes dt))$$
$$-dx\otimes dx - e^{-2x}dy\otimes dy],$$

где $k = \mathrm{const}$. Много интересной инофрмации о классификации точных решений уравнений Эйнштейна по их симметриям приведено в книге [23].

14. Применения производной Ли (5): группа конформных симметрий евклидовой и псевдоевклидовой метрик $(n > 2)$

Рассмотрим теперь ситуацию, которая слегка обобщает непрерывные симметрии и, в частности, изометрии. Пусть T — тензорное поле некоторой валентности и пусть X — векторное поле, поток ϕ^t_X которого действует на тензорное поле T так, что выполняется равенство:

$$(\phi^t_X)^* T_{\phi^t(p)} = f(t,p)T_p,$$

где $f(t,p)$ — некоторая гладкая функция $R\times\mathcal{M}\to R$. В случае, если $f\equiv 1$, мы имеем стандартную лиеву симметрию тензора T: $L_X T = 0$. В случае $f(t,p)\neq 1$, производная Ли тензора T имеет вид:

$$L_X T \equiv \lim_{t\to 0}\frac{(\phi^t_X)^* T_{\phi^t(p)} - T_p}{t} = T_p \lim_{t\to 0}\frac{f(t,p)-1}{t} = \Phi T, \qquad (61)$$

где $\Phi = \partial_t f|_{t=0}$. Симметрия тензорного поля T, описываемая уравнением (61), называется *конформной симметрией*, а векторное поле X называется *полем конформной симметрии тензорного поля T*. Конформная симметрия тензорных поле обобщает лиеву симметрию, которая описывается более простым уравнением $L_X T = 0$. Кроме преобразований лиевой симметрии (при $f = 1$ и $\Phi = 0$), конформная симметрия включает такие преобразования, которые оставляют неизменными все характеристические направления тензорного поля в каждой точке (например собственные направления симметричных тензоров валентности два), но может изменять длины характеристических векторов и значения характеристических скаляров (например длин собственных векторов и собственных значений симметричных тензоров валентности два).

С физической точки зрения конформные преобразования осуществляют переходы между системами отсчета в ситуациях, когда единичные масштабы по каким-либо причинам установить невозможно или они несущественны для круга решаемых задач. Примером подобной ситуации является мир световых сигналов в СТО или в ОТО: 4-мерные длины, измеренные вдоль световых лучей, равны нулю. Полной группой симметрии такого мира будет не группа Пуанкаре, а конформная группа, оставляющая инвариантными светоподобные интервалы и световые конуса, а не 4-мерные псевдоевклидовы интервалы. Разумеется такая группа будет включать в себя группу Пуанкаре. Преобразования из группы конформных симметрий, не принадлежащие группе Пуанкаре (или соответствующей группе изометрий для $\mathcal{M}_{p,q}$), будем называть *собственными конформными преобразованиями.*

В настоящем разделе мы вычислим такие собственные конформные преобразования для пространства $\mathcal{M}_{p,q}$ при $p+q>2$. Для метрики (57) конформные уравнения Киллинга (61) для поля конформной симметрии $Z=X^\alpha(x,y)\partial_\alpha+Y^\beta(x,y)\partial_\beta$ принимают вид:

$$2\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha}=\Phi;\quad 2\frac{\partial Y^\beta}{\partial y^\beta}=\Phi;\quad \text{суммирования нет!} \tag{62}$$

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma}+\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\alpha}=0;\quad \frac{\partial Y^\beta}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial Y^\gamma}{\partial y^\beta}=0;\quad \frac{\partial X^\alpha}{\partial y^\beta}+\frac{\partial Y^\beta}{\partial x^\alpha}=0. \tag{63}$$

Вычисляя смешанные вторые производные $\partial/\partial x^\alpha\partial x^\sigma$, $\partial/\partial y^\beta\partial y^\gamma$ и $\partial/\partial x^\alpha\partial y^\beta$ от левых частей соответственно первого, второго и третьего уравнений (63) с учетом уравнений (62), приходим к условиям на Φ:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^\alpha\partial x^\alpha}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^\beta\partial y^\beta}=0;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^\alpha\partial x^\alpha}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}=0;$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^\beta\partial y^\beta}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^\gamma\partial y^\gamma}=0.$$

Из этих условий непосредственно следует, что функция Φ линейна по переменным x и y и может быть представлена в виде:

$$\Phi = 2(A \cdot x) + 2B \cdot y + 2d, \tag{64}$$

где A и B — соответственно числовые p и q — векторы, d — вещественная константа, а точка означает евклидово скалярное произведение. Интегрируя теперь уравнения (62) с правой частью в виде (64), мы получаем следующее представление компонент поля конформной симметрии:

$$X^\alpha = (A \cdot x)' x^\alpha + \frac{A^\alpha (x^\alpha)^2}{2} + (B \cdot y) x^\alpha + D x^\alpha + \varphi^\alpha; \tag{65}$$

$$Y^\beta = (B \cdot y)' y^\beta + \frac{B^\beta (y^\beta)^2}{2} + (A \cdot x) y^\beta + D y^\beta + \psi^\beta, \tag{66}$$

где φ^α и ψ^β — семейства пока еще неопределенных функций, удовлетворяющих условиям: $\partial\varphi^\alpha/\partial x^\alpha = 0$, $\partial\psi^\beta/\partial y^\beta = 0$ (суммирования по повторяющимся индексам нет!). Штрих у скалярного произведения обозначает его неполный характер: в сумме произведений компонент скалярного произведения слагаемое с номером α или с номером β отсутствует. Подставляя полученный общий вид полей в оставшиеся уравнения (63), приходим к следующим уравнениям на неизвестные функции φ^α и ψ^β:

$$\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial x^\alpha} = -(A^\sigma x^\alpha + A^\alpha x^\sigma); \quad \frac{\partial\psi^\beta}{\partial y^\gamma} + \frac{\partial\psi^\gamma}{\partial y^\beta} = -(B^\gamma y^\beta + B^\beta y^\gamma); \tag{67}$$

$$\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial y^\beta} + \frac{\partial\psi^\beta}{\partial x^\alpha} = A^\alpha y^\beta + B^\beta x^\alpha.$$

Ввиду того, что нас интересуют только собственные конформные преобразования, достаточно найти только частные решения неоднородных уравнений (67), опуская общие решения однородных уравнений, отвечающих за уже найденные ранее изометрии. Искомые частные решения имеют вид:

$$\varphi^\alpha = -\frac{A^\alpha}{2}(s^2 - (x^\alpha)^2); \quad \psi^\beta = \frac{B^\beta}{2}(s^2 + (y^\beta)^2), \tag{68}$$

где $s^2 \equiv \sum\limits_{\sigma=1}^{p}(x^\sigma)^2 - \sum\limits_{\gamma=1}^{q}(y^\gamma)^2$. Окончательно, подставляя выражения (68) в (65) и (66) после некоторых упрощений приходим к следующему выражению компонент поля собственных конформных симметрий пространства $\mathcal{M}_{p,q}$:

$$X^\alpha = (A\cdot x)x^\alpha - \frac{A^\alpha}{2}s^2 + (B\cdot y)x^\alpha + Dx^\alpha; \tag{69}$$

$$Y^\beta = (B\cdot y)y^\beta + \frac{B^\beta}{2}s^2 + (A\cdot x)y^\beta + Dy^\beta. \tag{70}$$

Проверьте самостоятельно, что собственные конформные симметрии образуют алгебру относительно скобки Ли. Из формул (69)-(70) легко подсчитать ее размерность: она равна числу независимых произвольных постоянных параметров, входящих в выражения для поля симметрии. Таким образом размерность алгебры собственных конформных симметрий $\mathcal{M}_{p,q}$ равна $n_C = p+q+1$. Для пространства Минковского мы имеем $n_C = 5$, что в совокупности с 10-параметрической группой Пуанкаре дает *полную 15-параметрическую конформную группу* $\mathcal{M}_{1,3}$. Отметим, что поле вида (69)-(70) с $A = B = 0$ и $D \neq 0$ отвечает за однородные растяжения пространства-времени. Поля с $A \neq 0$ и (или) $B \neq 0$ — это нелинейные преобразования пространства $\mathcal{M}_{p,q}$, включающие инверсию относительно единичных метрических сфер пространств $\mathcal{M}_{p,q}$. Отметим, что классический координатный подход к исследованию конформных симметрий выглядит существенно более громоздко [24].

15. Применения производной Ли (6): группа конформных симметрий евклидовой и псевдоевклидовой плоскости.

Как мы покажем в этом разделе, случай $n = 2$ является особым как в евклидовом, так и в псевдоевклидовом случае. Несмотря на то, что сами уравнения конформной симметрии при $n = 2$ являются частным случаем уравнений (62)-(63), их решения существенно богаче и допускают произвольные функции. Действительно, в двумерном случае для метрики вида:

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + \epsilon dx^2 \otimes dx^2 \quad (\epsilon = \pm 1),$$

уравнения (62)-(63) принимают вид:

$$\partial_1 \xi^1 = \frac{\phi}{2}; \quad \partial_2 \xi^2 = \frac{\phi}{2}; \quad \partial_2 \xi^1 + \epsilon \partial_1 \xi^2 = 0. \tag{71}$$

Дифференцируя последнее уравнение последовательно по x^1 и x^2 и пользуясь первыми двумя уравнениями, приходим к условию на функцию ϕ:

$$(\partial_1^2 + \epsilon \partial_2^2)\phi = 0. \tag{72}$$

Воспользуемся тем обстоятельством, что в двумерном случае существует потенциал (сопряженная функция) χ, определяемый условиями:

$$\partial_1 \phi = \partial_2 \chi; \quad \partial_2 \phi = -\epsilon \partial_1 \chi.$$

С учетом этих определений, условие (72) выполняется тождественно. Непосредственной проверкой можно убедиться, что решения уравнений (71) можно записать через функции ϕ и χ следующим образом:

$$\xi^1 = \frac{1}{2} \int\limits_{(x_0^1, x^2)}^{(x^1, x^2)} \phi(x^1, x^2)\, dx^1 - \frac{\epsilon}{2} \int\limits_{(x_0^1, x_0^2)}^{(x_0^1, x^2)} \chi(x_0^1, x^2)\, dx^2 + Cx^2;$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2} \int\limits_{(x^1, x_0^2)}^{(x^1, x^2)} \phi(x^1, x^2)\, dx^2 + \frac{1}{2} \int\limits_{(x_0^1, x_0^2)}^{(x^1, x_0^2)} \chi(x^1, x_0^2)\, dx^1 - \epsilon C x^1.$$

Здесь (x_0^1, x_0^2) — произвольная начальная точка, а интегрирование выполняется вдоль любой кривой, соединяющей точки на нижних и верхних пределах интегрирования. Таким образом, общее поле конформной симметрии евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей содержат произвольные гармонические или псевдогармонические (волновые) функции.

Конечные конформные преобразования более наглядно записываются: в евклидовом случае на языке комплексной переменной z:

$$g = \frac{1}{2}(dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz) \overset{z=f(w)}{\rightarrow} g^f \equiv \frac{|f(w)|^2}{2}(dw \otimes d\bar{w} + d\bar{w} \otimes dw),$$

где $f(z)$ — произвольная аналитическая функция; в псевдоевклидовом случае в изотропных координатах $\{\xi^\alpha\}_{\alpha=1,2}$:

$$g = \frac{1}{2}(d\xi^1 \otimes d\xi^2 + d\xi^2 \otimes d\xi^1) \overset{\xi^\alpha = f^\alpha(\eta^\alpha)}{\rightarrow} g^f \equiv \frac{f^1(\eta^1)f^2(\eta^2)}{2}(d\eta^1 \otimes d\eta^2 + d\eta^2 \otimes d\eta^1).$$

В таком представлении бесконечномерность группы конформных симметрий двумерных евклидовой и псевдоевклидовой метрик очевидна.

16. Применения производной Ли (7): группа изометрий однородных кубических метрик

В качестве примера, в достаточной мере не отраженного в классической литературе, исследуем изометрии однородных кубических метрик вида:

$$G = G_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma, \tag{73}$$

где $G_{\alpha\beta\gamma}$ — симметричная числовая кубическая матрица. Пространства с метриками такого рода традиционно относят у классу *финслеровых пространств*, а метрику G называют соответственно *финслеровой метрикой* [25]. Введем следующие обозначения:

$$G_{\alpha\alpha\alpha} = A_\alpha; \quad G_{122} = B_1; \quad G_{133} = B_2; \quad G_{233} = B_3; \tag{74}$$

$$G_{112} = C_1; \quad G_{113} = C_2; \quad G_{223} = C_3; \quad G_{123} = F,$$

где все A_α, B_β, C_γ и F — постоянные.

Не все компоненты (74) метрики G одновременно геометрически значимы. Представление (74) инвариантно относительно выбора координат среди класса аффинно-эквивалентных систем, в которых компоненты метрики остаются постоянными. Матрица невырожденного аффинного преобразования в R^3 имеет в общем случае 9 независимых компонент и ими можно распорядиться таким образом, чтобы обратить в нуль 8 из 10 компонент компонент метрики G, поскольку уравнения вида

$$G'_{\alpha\beta\gamma} = G_{\rho\sigma\delta} h^\rho_\alpha h^\beta_\sigma h^\delta_\gamma = 0 \tag{75}$$

однородны по компонентам h. Ввиду сложного характера системы уравнений (75), конкретный набор восьми коэффициентов, которые можно обратить в нуль, сложным образом зависит от исходных значений компонент метрики. В частности, в некоторых вырожденных случаях исходной метрики в нуль можно обратить 9 из 10 компонент.

Отсюда следует два важных для нашего исследования вывода:

1. Для полного исследования достаточно исследовать метрики с небольшим числом отличных от нуля коэффициентов;

2. Следует перебрать всевозможные случаи сочетания небольшого числа отличных от нуля коэффициентов;

Мы показываем, что в действительности можно ограничиться метриками G с числом отличных от нуля коэффициентов, не превышающим 6.

Число отличных от нуля коэффициентов однородной метрики будет задавать *аффинный тип* $\tau(G)$ однородной метрики G. Отметим, что аффинный тип метрики G зависит от выбора аффинной системы координат. Инвариантной характеристикой, не зависящей от выбора системы координат, является *точный аффинный тип:*

$$\tau_0(G) \equiv \min_{\mathrm{Aff}(R^3)} \tau(G),$$

где $\mathrm{Aff}(R^3)$ — класс аффинных систем координат в R^3, связанных невырожденными аффинными преобразованиями. Назовем две однородных финслеровых метрики G_1 и G_2 *эквивалентными*: $G_1 \sim G_2$, если существует такая аффинная система координат в R^3, в которой компоненты G_1 и G_2 попарно совпадают. Очевидно, для эквивалентных метрик $G_1 \sim G_2$ может быть $\tau(G_1) \neq \tau(G_2)$, но их точные аффинные типы должны совпадать: $\tau_0(G_1) = \tau_0(G_2)$. Совпадение точных аффинных типов двух метрик, однако, не является достаточным условием их эквивалентности, поскольку, вообще говоря, компоненты, которые входят в минимальное множество отличных от нуля, для этих метрик могут быть различными.

После этих общих соображений перейдем к анализу симметрий. Система уравнений Киллинга в общем случае (74) принимает вид:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
3A_1\partial_1X^1+3C_1\partial_1X^2+3C_2\partial_1X^3=0;\\
2C_1\partial_1X^1+2B_1\partial_1X^2+2F\partial_1X^3+A_1\partial_2X^1+C_1\partial_2X_2+C_2\partial_2X^3=0;\\
B_1\partial_1X^1+A_2\partial_1X^2+C_3\partial_1X^3+2C_1\partial_2X^1+2B_1\partial_2X^2+2F\partial_2X^3=0;\\
3B_1\partial_2X^1+3A_2\partial_2X^2+3C_3\partial_2X^3=0;\\
2C_2\partial_1X^1+2F\partial_1X^2+2B_2\partial_1X^3+A_1\partial_3X^1+C_1\partial_3X^2+C_2\partial_3X^3=0;\\
F\partial_1X^1+C_3\partial_1X^2+B_3\partial_1X^3+C_2\partial_2X^1+F\partial_2X^2+B_2\partial_2X^3+C_1\partial_3X^1+\\
+B_1\partial_3X^2+F\partial_3X^3=0;\\
2F\partial_2X^1+2C_3\partial_2X^2+2B_3\partial_2X^3+B_1\partial_3X^1+A_2\partial_3X^2+C_3\partial_3X^3=0;\\
B_2\partial_1X^1+B_3\partial_1X^2+A_3\partial_1X^3+2C_2\partial_3X^1+2F\partial_3X^2+2B_2\partial_3X^3=0;\\
B_2\partial_2X^1+B_3\partial_2X^2+A_3\partial_2X^3+2F\partial_3X^1+2C_3\partial_3X^2+2B_3\partial_3X^3=0;\\
3B_2\partial_3X^1+3B_3\partial_3X^2+3A_3\partial_3X^3=0.
\end{array}
\right.
\tag{76}
$$

Рассмотрим последовательно все частные случаи общих метрик с различными $\tau(G)$. Там, где это возможно, мы, не оговаривая особо, используем свободу выбора масштабов координат для превращения соответствующих коэффициентов в ± 1 (канонический вид). Кроме того, не рассматриваем отдельно случаев, которые отличаются друг от друга лишь перестановкой координат. Наконец, мы всюду отбрасываем постоянные векторные поля, образующие подалгебру трансляций алгебры симметрий метрики G, существование которой очевидно и исследуем симметрии, отличные от трансляций. Мы будем называть их *нетривиальными симметриями* однородных финслеровых метрик.

16.1. Метрики с $\tau(G)=\tau_0(G)=1$ (3 типа)

В описании случаев указываются только отличные от нуля компоненты метрики, а все остальные компоненты подразумеваются равными нулю. При этом здесь и далее мы указываем только те случаи, в которых имеются нетривиальные симметрии.

1. $F \neq 0$. Метрика принимает следующий канонический вид:

   $$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3), \tag{77}$$

   где $\hat{\mathcal{S}}$ — оператор симметризации тензорного произведения. Она называется *метрикой Бервалььда-Моора.* Нетривиальная алгебра симметрий этой метрики представлена следующими векторными полями [**?**, 5]:

   $$X_1 = x^1\partial_1 - x^2\partial_2; \quad X_2 = x^1\partial_1 - x^3\partial_3,$$

   описывающим согласованные (унимодулярные) дилатации координатных осей. Отметим, что эта алгебра абелева.

2. $B_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:

   $$G = dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^1. \tag{78}$$

   Алгебра ее нетривиальных симметрий бесконечномерна:

   $$X = x^2\partial_2 - 2x^1\partial_1 + f(x^1, x^2, x^3)\partial_3,$$

   где f — произвольная гладкая функция трех переменных, и соответствует унимодулярным дилатациям пары координат.

3. $A_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:

   $$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1. \tag{79}$$

   Алгебра ее нетривиальных симметрий бесконечномерна:

   $$X = f_2(x^1, x^2, x^3)\partial_2 + f_3(x^1, x^2, x^3)\partial_3,$$

   где f_2, f_3 — произвольные гладкие функции трех переменных.

Этими случаями, по существу, исчерпывается класс метрик с $\tau_0(G) = 1$. Отметим, что метрики (78)-(79) геометрически вырождены как 3-мерные метрики, поскольку описываются всего двумя элементами 3-мерного базиса 1-форм $\{dx^1, dx^2, dx^3\}$.

16.2. Метрики с $\tau(G) = 2$ (9 типов)

1. $F \neq 0, A_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:
$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3). \tag{80}$$
Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:
$$X = x^2\partial_2 - x^3\partial_3.$$

2. $F \neq 0, B_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:
$$G = dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^1 + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3). \tag{81}$$
Алгебра нетривиальных симметрий двумерна:
$$X_1 = x^1\partial_1 - (x^3 + x^2/2)\partial_3; \quad x^2\partial_2 - (x^3 + x^2)\partial_3.$$

3. $A_1 \neq 0, B_3 \neq 0$. Канонический вид метрики:
$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^2 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^3 \otimes dx^2. \tag{82}$$
Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:
$$X = x^2\partial_2 - (x^3/2)\partial_3.$$

4. $A_1 \neq 0, C_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:
$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3 + dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^1 + dx^3 \otimes dx^1 \otimes dx^1. \tag{83}$$
Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:
$$X = x^1\partial_1 - (2x^2 + x^1)\partial_2.$$

5. $B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:
$$G = dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^1 \tag{84}$$
$$\pm(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^3 \otimes dx^1).$$
Алгебра нетривиальных симметрий 2-мерна:
$$X_1 = x^1\partial_1 - (x^2/2)\partial_2 - (x^3/2)\partial_3; \quad X_2 = x^3\partial_2 \mp x^2\partial_3.$$

6. $B_1 \neq 0, B_3 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^1 + \tag{85}$$

$$dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^3 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^2 \otimes dx^3.$$

Алгебра нетривиальных симметрий 2-мерна:

$$X_1 = -2x^1\partial + x^2\partial_2 - (x^3/2)\partial_3; \quad X_2 = x^3\partial_1 - (x^2/2)\partial_3.$$

7. $B_1 \neq 0, C_3 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^1 + \tag{86}$$

$$dx^3 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3.$$

Алгебра нетривиальных симметрий бесконечномерна:

$$X_1 = x^2\partial_2 - 2(x^1 + x^3)\partial_3; \quad X_2 = f(x^1, x^2, x^3)(\partial_1 - \partial_3),$$

где f — произвольная гладкая функция трех переменных.

8. $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^2 \tag{87}$$

Алгебра нетривиальных симметрий бесконечномерна:

$$X = f(x^1, x^2, x^3)\partial_3,$$

где f — произвольная гладкая функция трех переменных.

9. $A_1 \neq 0, B_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 \pm \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) \tag{88}$$

Алгебра нетривиальных симметрий бесконечномерна:

$$X = f(x^1, x^2, x^3)\partial_3,$$

где f — произвольная гладкая функция трех переменных.

16.3. Метрики с $\tau(G) = 3$ (13 типов)

В большей части случаев симметрии тривиальны. Нетривиальные симметрии имеются лишь в следующих тринадцати типах.

1. $F \neq 0, A_1 \neq 0, B_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 \pm \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3). \quad (89)$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = x^2 \partial_2 - (x^3 \pm x^2)\partial_3.$$

2. $F \neq 0, A_1 \neq 0, C_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3). \quad (90)$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = x^2 \partial_2 - (x^3 + x^1/2)\partial_3.$$

3. $F \neq 0, B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) \pm \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3). \quad (91)$$

Алгебра нетривиальных симметрий двумерна:

$$X_1 = x^1 \partial_1 \pm (x^3/2)\partial_2 - (x^3 + x^2/2)\partial_3; \quad X_2 = (x^2 \pm x^3)\partial_2 - (x^2 + x^3)\partial_3.$$

4. $F \neq 0, B_1 \neq 0, B_3 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3). \quad (92)$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^1 + x^3)\partial_1 - (x^3 + x^2/2)\partial_3.$$

5. $F \neq 0, B_1 \neq 0, C_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3). \tag{93}$$

Алгебра нетривиальных симметрий двумерна:

$$X_1 = x^2\partial_2 - (x^2 + x^3)\partial_3; \quad X_2 = x^1\partial_1 - (x^3 + x^2/2 + x^1)\partial_3.$$

6. $F \neq 0, B_1 \neq 0, C_3 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3). \tag{94}$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^3 + x^2/2)\partial_3 - (x^1 + x^2/2)\partial_1.$$

7. $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, C_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3). \tag{95}$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = x^1\partial_1 - (x^1 + 2x^3)\partial_3.$$

8. $A_1 \neq 0, B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + \epsilon_1\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \epsilon_2\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3), \tag{96}$$

где $\epsilon_1 = \pm 1$, $\epsilon_2 = \pm 1$ — независимые знаковые множители. Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = x^3\partial_2 - \epsilon_1\epsilon_2 x^2\partial_3.$$

9. $A_1 \neq 0, B_1 \neq 0, C_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 \pm \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3), \tag{97}$$

Алгебра нетривиальных симметрий двумерна:

$$X_1 = x^1\partial_1 - (x^2/2)\partial_2 - 2x^3\partial_3; \quad X_2 = \mp(x^1/2)\partial_2 + x^2\partial_3.$$

10. $A_1 \neq 0, B_1 \neq 0, C_3 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 \pm \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3), \quad (98)$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = x^2\partial_2 - 2(x^3 \pm x^1)\partial_3.$$

11. $B_1 \neq 0, B_2 \neq 0, C_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) \pm \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2), \quad (99)$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = x^3\partial_2 \mp 2(x^1/2 + x^2)\partial_3.$$

12. $B_1 \neq 0, B_3 \neq 0, C_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2). \quad (100)$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = x^3\partial_1 - (x^1 + x^2/2)\partial_3.$$

13. $B_1 \neq 0, B_3 \neq 0, C_3 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) \pm \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3). \quad (101)$$

Алгебра нетривиальных симметрий двумерна:

$$X_1 = x^2\partial_2 - (x^3/2)\partial_3 - (2x^1 + 3x^3/2)\partial_1; \quad X_2 = x^2\partial_3 - (x^2 \pm 2x^3)\partial_1.$$

16.4. Метрики с $\tau(G) = 4$ (10 типов)

1. $F \neq 0, A_1 \neq 0, B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = F\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) + \epsilon_1\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \tag{102}$$

$$\epsilon_2\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1.$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^3 + \epsilon_2 F x^2)\partial_2 - \epsilon_2(\epsilon_1 x^2 + F x^3)\partial_3.$$

2. $F \neq 0, A_1 \neq 0, B_1 \neq 0, C_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = F\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) \pm \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \tag{103}$$

$$\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3) + dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1.$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^3 \pm x^2/F)\partial_3 - (x^2 + x^1/2F)\partial_2.$$

3. $F \neq 0, B_1 \neq 0, B_2 \neq 0, C_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = F\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) \pm \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \tag{104}$$

$$\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3).$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^2 \pm F x^3)\partial_3 \mp (F x^2 + x^3 + x^1/2)\partial_2.$$

4. $F \neq 0, B_2 \neq 0, B_3 \neq, C_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = F\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \tag{105}$$

$$\hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3).$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^1 + x^3/2F)\partial_1 - (x^2 + x^1/F + x^3/2F)\partial_2.$$

5. $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, B_1 \neq 0, C_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:
$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + \tag{106}$$
$$B\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3).$$
Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:
$$X = x^1\partial_1 - Bx^1\partial_2 + 2(B^2x^2 - x^3 - x^1/2)\partial_3.$$

6. $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, B_1 \neq 0, C_3 \neq 0$. Канонический вид метрики:
$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + \tag{107}$$
$$B\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3).$$
Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:
$$X = x^2\partial_2 - (2x^3 + 2Bx^1 + x^2)\partial_3.$$

7. $A_1 \neq 0, B_1 \neq 0, B_2 \neq 0, C_1 \neq 0$. Канонический вид метрики:
$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + \epsilon_1\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \tag{108}$$
$$\epsilon_2\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + C\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3).$$
Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:
$$X = x^3\partial_2 - (\epsilon_1\epsilon_2x^2 + \epsilon_2Cx^1/2)\partial_3.$$

8. $A_1 \neq 0, B_2 \neq 0, B_3 \neq 0, C_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:
$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 \pm \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \tag{109}$$
$$\hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + C\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3).$$
Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:
$$X = x^3\partial_3 - Cx^3\partial_1 + (\pm Cx^3 + 2(C^2 \mp 1)x^1 - 2x^2)\partial_2.$$

9. $A_1 \neq 0, B_1 \neq 0, C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + B\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \tag{110}$$

$$\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3).$$

Алгебра нетривиальных симметрий двумерна:

$$X_1 = x^1\partial_1 - (x^2/2)\partial_2 - (2x^3 + x^1 + 3x^2/2)\partial_3; \quad X_2 = x^1\partial_2 - (x^1 + 2Bx^2)\partial_3.$$

10. $B_1 \neq 0, B_2 \neq 0, C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$. Канонический вид метрики:

$$G = B\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \tag{111}$$

$$\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3).$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^3 + x^1/2)\partial_2 - (Bx^2 + x^1/2)\partial_3.$$

16.5. Метрики с $\tau(G) = 5$ (5 типов)

С технической точки зрения — это самый сложный случай, так как в нем содержится самое большое количество комбинаций коэффициентов, подлежащих проверке. Эта сложность компенсируется относительной малостью случаев, в которых метрика обладает нетривиальной симметрией.

1. $F = 0, A_1 = 0, A_2 = 0, B_1 = 0, C_1 = 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^3 \otimes dx^3 \otimes dx^3 + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3) \tag{112}$$

$$+C_2\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3) + C_3\hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3).$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^3 + 2C_3x^2)\partial_1 - (x^3 + 2C_2x^1)\partial_2.$$

2. $F = 0, A_1 = 0, B_1 = 0, C_1 = 0, C_2 = 0$. Канонический вид метрики:

$$G = dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \otimes dx^3 + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) \quad (113)$$
$$+B_3 \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + C_3 \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3).$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = ((B_3 3 - 1)x^3 + 2(C_3^2 - B_3)x^2 - 2x^1)\partial_1 - C_3 x^3 \partial_2 + x^3 \partial_3.$$

3. $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0, B_1 = 0, C_1 = 0$. Канонический вид метрики:

$$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) + C_2 \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3) + C_3 \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3) \quad (114)$$
$$+\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3).$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^3 + 2x^1 + 2C_3 x^2)\partial_1 - (2x^2 + 2C_2 x^1 + x^3)\partial_2.$$

4. $A_1 = 0, A_2 = 0, B_1 = 0, B_2 = 0, C_1 = 0$. Канонический вид метрики:

$$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) + C_2 \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3) + C_3 \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3) \quad (115)$$
$$+\hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + dx^3 \otimes dx^3 \otimes dx^3.$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^1 + x^2/C_2)\partial_2 - \frac{2x^1 + 2C_3 x^2 + x^3}{2C_2}\partial_1.$$

5. $A_1 = 0, A_2 = 0, B_1 = 0, C_1 = 0, C_2 = 0$. Канонический вид метрики:

$$G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) + dx^3 \otimes dx^3 \otimes dx^3 + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) \quad (116)$$
$$+C_3 \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3) + B_3 \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3).$$

Алгебра нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^3 + 2x^2)\partial_2 - (2x^1 + 2C_3 x^2 + B_3 x^3)\partial_1.$$

16.6. Метрики с $\tau(G) = 6$.

Существует только одна метрика общего вида этого типа при $A_1 = 0, A_2 = 0, B_1 = 0, C_1 = 0$:

$$G = F\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^3) + \hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^3) \quad (117)$$

$$+dx^3 \otimes dx^3 \otimes dx^3 + C_2\hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^3) + C_3\hat{\mathcal{S}}(dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^3).$$

Алгебра ее нетривиальных симметрий одномерна:

$$X = (x^3 + 2Fx^1 + 2C_3x^2)\partial_1 - (2Fx^2 + 2C_2x^1 + x^3)\partial_2.$$

16.7. Метрики с $\tau(G) = 6, 7, 8, 9, 10$.

Среди метрик перечисленного аффинного типа нет представителей общего типа с нетривиальными симметриями.

Таким образом, имеется 41 общая кубическая метрика с различными аффинными типами, обладающих нетривиальными изометриями. Отметим, что наш анализ касается именно метрик общих аффинных типов. Внутри любого типа с тривиальными симметриями могут оказаться метрики со специальными значениями компонент метрики, при которых метрика данного типа будет обладать изометрией. В большинстве случаев такая изометрия будет эквивалентна одной из изометрий метрик с меньшим значением аффинного типа, у которых число компонент увеличилось за счет ее аффинного преобразования. В этом случае мы имеем дело с эквивалентными метриками. Но возможны ситуации, когда при частных значениях компонент метрика не эквивалентна ни одной из рассмотренных нами. Именно эти "очень специальные" метрики остаются за пределами нашего рассмотрения.

16.8. Инвариантная классификация метрик с нетривиальными изометриями

Некоторые из аффинных типов метрик, обладающих симметриями, являются аффинно-эквивалентными. Для выяснения вопроса об эквивалентности метрик из перечисленных выше 38 классам обратимся к (аффинно-)инвариантным свойствам их полей симметрий.

Первичная классификация связана с размерностью алгебр симметрий. Группируя различные аффинные типы с одинаковыми размерностями алгебры симметрий, мы приходим к следующим заведомо не эквивалентным классам:

1. класс аффинных типов с двумерной алгеброй симметрии, включающий случаи (первая цифра — аффинный тип, вторая — порядковый номер в соответствующем разделе): 1.1, 2.2, 2.5, 2.6, 3.3, 3.5, 3.9, 3.13, 4.9;

2. класс аффинных типов с одномерной алгеброй симметрии, включающий случаи: 2.1, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2, 3.4, 3.6, 3.7, 3.8, 3.10, 3.11, 3.12, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.10, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 6.1.

3. типы 1.2, 1.3, 2.7, 2.8, 2.9 с бесконечно-мерной алгеброй симметрии;

4. все, типы, которые не вошли в рассмотренные и которые не обладают нетривиальными симметриями;

5. "очень специальные метрики", которые не входят ни в один из предыдущих пунктов.

Два последних класса целиком остаются за пределами нашего рассмотрения. Первые два класса допускают дальнейшую более детальную классификацию. Непосредственной проверкой убеждаемся, что коммутатор пары векторных полей симметрий метрик первого класса равен:

1. 0, для случаев 1.1, 2.2, 2.5, 3.3, 3.5;

2. $(3/2)X_2$ для случаев 2.6, 3.9, 3.13, 4.9.

Таким образом, приходим к заключению, что *группы метрик* $\{1.1, 2.2, 3.3, 3.5\}$, *и* $\{2.6, 3.9, 3.13, 4.9\}$ *аффинно-неэквивалентны.* Вопрос об аффинной эквивалентности метрик внутри этих групп, вообще говоря, остается открытым. Мы вернемся к нему в следующем разделе.

Перейдем к классу аффинных типов с одномерной алгеброй симметрий. Грубая классификация этих типов заключается в сравнении простейшего аффинного инварианта этих алгебр — дивергенции соответствующего векторного поля: $\operatorname{div} X \equiv \partial_i X^i$. Элементарное вычисление обнаруживает, что $\operatorname{div} X = 0$ для случаев: 2.1, 3.1, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 3.11, 3.12, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.7, 4.10, 5.1, 5.3, 5.4, 5.5, 6.1 и $\operatorname{div} X = \mathrm{const} \neq 0$ для случаев 2.3, 2.4, 3.7, 3.10, 4.5, 4.6, 4.8, 5.2. Таким образом, *аффинные типы, взятые из различных перечисленных здесь групп, аффинно-неэквивалентны.*

Для дальнейшей более детальной классификации типов внутри групп необходимо сравнивать другие аффинные инварианты. Для их построения учтем, что все векторные поля симметрий рассматриваемых типов имеют линейные и однородные по координатам компоненты. Каждому векторному полю такого вида можно поставить в соответствие *матрицу векторного поля,* определяемую соотношением:

$$X^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta,$$

где A^α_β — вещественные числа. Из этого определения вытекает, что A — аффинный тензор валентности $(1,1)$. Его аффинными инвариантами будут, например, следующие величины:

$$I_1 \equiv \mathrm{Tr}(A), \quad \ldots, I_n \equiv \mathrm{Tr}(A^n); \quad \Delta \equiv \det(A).$$

Отметим, что $\operatorname{div} X = I_1$. У эквивалентных метрик должны выполняться *условия коллинеарности*:

$$\sqrt[n]{\frac{I_n}{I'_n}} = \sqrt[3]{\frac{\Delta}{\Delta'}} = C = \mathrm{const} \tag{118}$$

для всех $n = 1, \ldots,$ где $\{I_n, \Delta\}$ — система инвариантов одной метрики, $\{I'_n, \Delta\}$ — система инвариантов другой. Можно построить и другие инварианты, но для наших целей достаточно перечисленных.

Для класса метрик с $\operatorname{div} X \neq 0$ матрицы векторного поля и соответствующие инварианты имеют вид:

$$1.2: \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = 1 + (-2)^n;$$

$$2.3: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \ I_n = \frac{1 + (-2)^n}{(-2)^n};$$

$$2.4: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; I_n = 1 + (-2)^n;$$

$$3.7: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; I_n = 1 + (-2)^n;$$

$$3.10: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\epsilon & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; I_n = 1 + (-2)^n;$$

$$4.5: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 \\ 0 & 2B^2 & -2 \end{pmatrix}, \; I_n = 1 + (-2)^n;$$

$$4.6: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2B & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; I_n = 1 + (-2)^n;$$

$$2.3: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -C \\ 2(C^2 \mp 1) & -2 & \pm C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; I_n = 1 + (-2)^n;$$

$$5.2: \quad \begin{pmatrix} -2 & 2(C_3^2 - B_3) & B_3C_3 - 1 \\ 0 & 0 & -C_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; I_n = 1 + (-2)^n.$$

Очевидно, что условия (118) выполняются для всех метрик из группы с $\operatorname{div} X = I_1 \neq 0$.

Для группы метрик с $\operatorname{div} X = I_1 = 0$ матрицы соответствующих векторных полей и аффинные инварианты имеют следующий вид (инвариант Δ выписывается только в случае, когда он отличен от нуля):

$$2.1: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; I_n = 1 + (-1)^n;$$

$$3.1: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; I_n = 1 + (-1)^n;$$

$$3.2: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ I_n = 1 + (-1)^n;$$

$$3.4: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}, \ I_n = 1 + (-1)^n;$$

$$3.6: \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \ I_n = 1 + (-1)^n;$$

$$3.8: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\epsilon_1\epsilon_2 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = (-\epsilon_1\epsilon_2)^{n/2}(1 + (-1)^n);$$

$$3.11: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \mp 1/2 & \mp 1 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = (\mp 1)^{n/2}(1 + (-1)^n);$$

$$3.12: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = (-1)^{n/2}(1 + (-1)^n);$$

$$4.1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 F & 1 \\ 0 & -\epsilon_1\epsilon_2 & -\epsilon_2 F \end{pmatrix}, \ I_n = (F^2 - \epsilon_1\epsilon_2)^{n/2}(1 + (-1)^n);$$

$$4.2: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2F & -1 & 0 \\ 0 & \pm 1/F & 1 \end{pmatrix}, \ I_n = (1 + (-1)^n);$$

$$4.3: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mp 1/2 & \mp F & \mp 1 \\ 0 & 1 & \pm F \end{pmatrix}, \ I_n = (F^2 \mp 1)^{n/2}(1 + (-1)^n);$$

$$4.4: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2F \\ -1/F & -1 & -1/2F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = 1 + (-1)^n;$$

$$4.7: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\epsilon_2 C/2 & -\epsilon_1\epsilon_2 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = (-\epsilon_1\epsilon_2)^{n/2}(1 + (-1)^n);$$

$$4.10: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & -B & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = (-B)^{n/2}(1+(-1)^n);$$

$$5.1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2C_3 & 1 \\ -2C_2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = (-4C_2C_3)^{n/2}(1+(-1)^n);$$

$$5.3: \quad \begin{pmatrix} 2 & 2C_3 & 1 \\ -2C_2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = (4(1-C_2C_3))^{n/2}((-1)^n+1);$$

$$5.4 \quad \begin{pmatrix} -1/C_2 & -C_3/C_2 & -1/2C_2 \\ 1 & 1/C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = (1-C_2C_3)^{n/2}(1+(-1)^n);$$

$$5.5: \quad \begin{pmatrix} -2 & -2C_3 & -B_3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = 4^{n/2}(1+(-1)^n);$$

$$6.1 \quad \begin{pmatrix} 2F & 2C_3 & -B_3 \\ -2C_2 & -2F & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ I_n = 2^n(F^2-C_2C_3)^{n/2}(1+(-1)^n)$$

Сравнительное исследование серий инвариантов обнаруживает следующие потенциальные классы аффинно-эквивалентных метрик:

1. $\{2.1$, 3.1, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8 ($\epsilon_1\epsilon_2 < 0$), 3.11 ($-$ в метрике), 4.1 ($F^2 > \epsilon_1\epsilon_2$), 4.2, 4.3 ($F^2 > \pm 1$), 4.4, 4.7 ($\epsilon_1\epsilon_2 < 0$), 4.10 ($B < 0$), 5.1 ($C_2C_3 < 0$), 5.3 $C_2C_3 < 1$, 5.4 ($C_2C_3 < 1$), 5.5, 6.1 ($F^2 > C_2C_3$)$\}$;

2. $\{3.8$ ($\epsilon_1\epsilon_2 > 0$), 3.11 (+ в метрике), 3.12, 4.1 ($F^2 < \epsilon_1\epsilon_2$), 4.3 ($F^2 < \pm 1$), 4.7 ($\epsilon_1\epsilon_2 > 0$), 4.10 ($B < 0$), 5.1 ($C_2C_3 > 0$), 5.3 $C_2C_3 > 1$, 5.4 ($C_2C_3 < 1$), 6.1 ($F^2 < C_2C_3$)$\}$;

3. $\{4.1$ ($F = \epsilon_1\epsilon_2$), 4.3 ($F^2 = +1$) ("+" в метрике), 4.10 $B = 0$, 5.3 $C_2C_3 = 1$, 5.4 ($C_2C_3 = 1$), 6.1 ($F^2 = C_2C_3$)$\}$;

Более детальное дополнительное исследование группы случаев 3, соответствующих обнулению инвариантов, приводит к следующим уточнениям:

1. Метрика 4.1 при $F^2 = \epsilon_1\epsilon_2$ допускает векторное поле симметрии с одной произвольной функцией от всех координат, т.е. допускает бесконечномерную группу симметрии.
2. Метрика 4.3 при $F^2 = 1$ допускает двумерную неабелеву группу симметрии, с коммутатором вида: $[X_1, X_2] = (3/2)X_2$.
3. Метрика 4.10 при $B = 0$ допускает двумерную неабелеву группу симметрии, с коммутатором вида: $[X_1, X_2] = (3/2)X_2$.
4. Метрика 5.3 при $C_2C_3 = 1$ допускает двумерную неабелеву группу симметрии, с коммутатором вида: $[X_1, X_2] = (3/2)X_2$.
5. Метрика 5.4 при $C_2C_3 = 1$ допускает двумерную неабелеву группу симметрии, с коммутатором вида: $[X_1, X_2] = (3/2)X_2$.
6. Метрика 6.1 при $F^2 = C_2C_3$ допускает двумерную неабелеву группу симметрии, с коммутатором вида: $[X_1, X_2] = (3/2)X_2$.

Подводя итоги нашего исследования, можно заключить, что *все однородные кубические метрики общих аффинных типов делятся на 8 аффинно-неэквивалентных классов:*

1. класс метрик $\{1.1, 2.2, 2.5, 3.3, 3.5\}$ (2-мерная абелева алгебра нетривиальных изометрий);
2. класс $\{2.6, 3.9, 3.13, 4.9, 4.3\,(F^2 = 1), 4.10\,(B = 0), 5, 3,\ 5.4\,(C_2C_3 = 1), 6.1\,(F^2 = C_2C_3)\}$ (2-мерная неабелева алгебра нетривиальных изометрий);
3. класс $\{1.2, 1.3, 2.7, 2.8, 2.9, 4.1\,(F^2 = \epsilon_1\epsilon_2)\}$ (бесконечномерная алгебра изометрий); при этом возникают подклассы (1): ∞^2-мерной группы (1.3), (2): ∞-мерной группы (2.8,2.9) и (3): $\infty+1$-мерной группы (1.2, 2.7);
4. класс $\{2.3, 2.4, 3.7, 3.10, 4.5, 4.6, 4.8, 5.2\}$ (одномерная алгебра нетривиальных изометрий $I_1 \neq 0$);
5. класс {2.1, 3.1, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8 ($\epsilon_1\epsilon_2 < 0$), 3.11 ($-$ в метрике), 4.1 ($F^2 > \epsilon_1\epsilon_2$), 4.2, 4.3 ($F^2 > \pm1$), 4.4, 4.7 ($\epsilon_1\epsilon_2 < 0$), 4.10 ($B < 0$), 5.1 ($C_2C_3 < 0$), 5.4 ($C_2C_3 < 1$), 5.5, 6.1 ($F^2 > C_2C_3$)} (одномерная алгебра нетривиальных изометрий, $\Delta = 0$, $I_n = C^{n/2}(1 + (-1)^n)$, $C = \mathrm{const}$;

6. класс {3.8 ($\epsilon_1\epsilon_2 > 0$), 3.11 (+ в метрике), 3.12, 4.1 ($F^2 < \epsilon_1\epsilon_2$), 4.3 ($F^2 < \pm 1$), 4.7 ($\epsilon_1\epsilon_2 > 0$), 4.10 ($B < 0$), 5.1 ($C_2C_3 > 0$), 5.4 ($C_2C_3 < 1$), 6.1 ($F^2 < C_2C_3$)}; (одномерная алгебра нетривиальных изометрий, $\Delta = 0$, $I_n = (-C)^{n/2}(1 + (-1)^n)$, $C = \mathrm{const}$);

7. класс метрик, обладающих нетривиальными симметриями и не вошедших в предыдущий перечень;

8. класс метрик, имеющих только тривиальные симметрии.

Вопрос об аффинной эквивалентности метрик внутри этих классов остается открытым. В следующем разделе мы убедимся, что ответ на этот вопрос отрицателен.

16.9. Связь с проективной классификацией кубичных форм

Выясним в этом разделе связь полученных результатов с известной проективной классификацией кубичных форм [26]. Комбинация методов проективной геометрии и алгебры кубических матриц, приводит к следующей классификационной теореме.

ТЕОРЕМА (о классификации вещественных кубических форм) Кубическая форма над полем вещественных чисел принадлежит одному из классов аффинной вещественной эквивалентности (указаны только отличные от нуля компоненты в канонической форме метрики):

1. Общий класс $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, с 10 неэквивалентными подклассами: $F < -(\sqrt{3}+1)/2$, $F = -(\sqrt{3}+1)/2$, $-(\sqrt{3}+1)/2 < F < -1/2$, $-1/2 < F < 0$, $F = 0$, $0 < F < (\sqrt{3}-1)/2$, $F = (\sqrt{3}-1)/2$, $(\sqrt{3}-1)/2 < F < 1$, $F = 1$, $F > 1$.

2. Вырожденный класс I: $A_1 = A_2 = F = 1$;

3. Вырожденный класс II: $A_1 = F = 1$;

4. Вырожденный класс III: $F = 1$;

5. Вырожденный класс IV: $A_1 = C_3 = 1$;

6. Вырожденный класс V: $C_1 = C_3 = 1$;
7. Вырожденный класс VI: $A_1 = A_2 = 1$;
8. Вырожденный класс VII: $C_1 = 1$;
9. Вырожденный класс VIII: $A_1 = 1$;
10. Вырожденный класс XIX: $A_3 = C_1 = B_3 = 1$;
11. Вырожденный класс X: $-A_2 = C_1 = B_3 = 1$;
12. Вырожденный класс XI: $A_2 = C_1 = B_3 = 1$;
13. Вырожденный класс XII: $C_1 = B_3 = 1$;
14. Вырожденный класс XI: $-A_2 = C_1 = 1$.

Сравнение приведенных в теореме канонических типов с рассмотренными выше аффинными типами приводит к следующим заключениям:

1. Общий класс при $F \neq -1/2$ имеет только тривиальные симметрии относится к симметрийному типу 9; при $F = -1/2$ общий класс допускает 2-мерную абелеву группу симметрий и относится к симметрийному типу 1;
2. Вырожденный класс I не имеет нетривиальных симметрий и также относится к типу 9;
3. Вырожденный класс II имеет 1-мерную группу симметрий с $I_1 = 0$ и относится к типу метрик 5 симметрийного класса;
4. Вырожденный класс III имеет 2-мерную абелеву группу симметрий относится к симметрийному типу 1;
5. Вырожденный класс IV имеет 1-мерную группу симметрий с $I_1 \neq 0$ и относится к симметрийному типу 4;
6. Вырожденный класс V имеет 2-мерную неабелеву группу симметрий и относится к симметрийному типу 2;
7. Вырожденный класс VI имеет ∞-мерную группу симметрий относится к симметрийному типу метрик 3(2);

8. Вырожденный класс VII имеет $\infty+1$-мерную группу симметрий и относится к симметрийному типу метрик 3(3);

9. Вырожденный класс VIII имеет ∞^2-мерную группу симметрий и относится к симметрийному типу метрик 3(1);

10. Вырожденный класс IX не имеет нетривиальных симметрий и относится к симметрийному типу метрик 8;

11. Вырожденный класс X имеет 1-мерную группу симметрий с $I_1 = 0$ и относится к симметрийному типу метрик 5;

12. Вырожденный класс XI имеет 1-мерную группу симметрий с $I_1 = 0$ и относится к симметрийному типу 5;

13. Вырожденный класс XII имеет 2-мерную абелеву группу симметрий и относится к симметрийному типу метрик 1;

14. Вырожденный класс XIII имеет ∞-мерную группу симметрий и относится к симметрийному типу метрик 3(2);

Взаимосвязь симметрийной и проективной классификаций резюмирована в таблице.

Симм. кл.	1	2	3	4	5	6	7	8
Проект. кл.	III,XII	V	(1): VIII, (2): VI,XIII, (3): VII	IV	II,X,XI	?	—	Общ, I,IX

Из приведенной таблицы можно сделать следующие важные заключения.

1. Симметрийная классификация является более грубой, поскольку некоторые симметрийные классы содержат несколько неэквивалентных проективных;

2. Пустота колонки с номером 7 означает, что в круг нашего исследования, на самом деле, попали все неэквивалентные классы кубических метрик;

3. Пустота колонки с номером 6 означает, что 5 и 6 симметрийные классы следует считать тождественными. При этом общая константа, которая входит в правую часть условия коллинеарности

инвариантов (118), составленного для метрик этих классов, будет чисто мнимая. Это соответствует утверждению о том, что, в действительности поля изометрий образуют не R-модуль, как мы предполагали, а C-модуль.

В заключение этих лекций их автор хотел бы поблагодарить Д.Г.Павлова за стимулирующие дискуссии и предоставленную возможность озвучивания части этих лекций на осенней Школе-2008, а также всех участников школы за ценные вопросы и обсуждения.

Литература

[1] Б. Грин, *Элегантная Вселенная*, М., УРСС, 2004

[2] Р. Пенроуз, Путь к реальности, М.-Ижевск, РХД, 2007

[3] Б. Шутц, *Геометрические методы в математической физике*, М., Мир, 1984

[4] Дж. Эллиот, П.Добер, *Симметрия в физике (в 2-х томах)*, М., Мир, 1983

[5] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, М., Наука, 1979

[6] М. М. Постников, *Лекции по геометрии (сем. III: Гладкие многообразия)*, М., Наука, 1987

[7] М. М. Постников, *Лекции по геометрии (сем. IV: Дифференциальная геометрия)*, М., Наука, 1988

[8] М. М. Постников, *Лекции по геометрии (сем. V: Риманова геометрия)*, М., Факториал, 1988

[9] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, М., Мир, 1987

[10] С. Ленг, *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*, М., Платон, 1996

[11] К. Номидзу, *Группы Ли и дифференциальная геометрия*, М., Платон, 1996

[12] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии (в 2-х томах)*, Новокузнецк, ИО НФМИ, 1999

[13] В. А. Ильин, Э. Г. Позднак, *Математический анализ (в 2-х томах)*, М., Наука, 1982

[14] М. М. Постников, *Лекции по геометрии (сем. I: Аналитическая геометрия)*, М., Физматлит, 1979

[15] М. М. Постников, *Лекции по геометрии (сем. II: Линенйая алгебра)*, М., Физматлит, 1979

[16] Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко, *Введение в топологию*, М., Наука, 1995

[17] C. H. Brance, D. Randall, gr-qc/9212003

[18] К. Г. Гараев, *Соросовский образовательный журнал*, №12, 1998, с.113-118.

[19] В. И. Арнольд, *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Ижевск, РХД, 2000

[20] П. Олвер, *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям*, М., Мир, 1989

[21] *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики (под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика)*, М., Факториал, 1997

[22] И. Д. Новиков, В. П. Фролов, *Физика черных дыр*, М., Наука, 1986

[23] *Точные решения уравнений Эйнштейна (под ред. Э. Шмутцера)*, М., Энергоиздат, 1982

[24] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, М., Физматлит, 1961 (приложение А, с. 510)

[25] Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, М., Наука, 1981

[26] Н. П. Соколов, *Пространственные матрицы и их приложения*, Москва, ГИФМЛ, 1960