# Близкодействие против дальнодействия: окончательна ли победа?

С.С.Кокарев, РНОЦ "Логос" , Ярославль.

**Аннотация**

Дан небольшой обзор результатов, полученных в рамках современного релятивистского варианта дальнодействующей формулировки электродинамики Фоккера-Тетроде вместе с Фейнман-Уилеровской теорией поглотителя. Обсуждаются причинный и космологический аспекты теории. Анализируется общефилософский статус концепций близкодействия и дальнодействия.

# Field theory versus action at a distance: does victory is ultimate?

S.S.Kokarev, RSEC "Logos" , Yaroslavl.

**Abstract**

The paper is brief review of results, obtained within the contemporary relativistic version of "action at a distance" type Fokker-Tetrode electrodynamics, together with Feynman-Wheeler's theory of an absorber. Causal and cosmological aspects of the theory are discussed. General philosophical status of the field-theoretical and "action at a distance" concepts is analyzed.

---

*...— И если вам померещится, что некая истина невыносима, — вынесите ее...*
*Г.К. Честертон, "Лиловый парик"*
*(пер. Н.Демуровой)*

# 1. Введение

Согласно современным представлениям все физические взаимодействия в природе сводятся к четырем фундаментальным: гравитационному, электромагнитному, сильному и слабому. При этом последние два проявляют себя в мире атомных ядер и элементарных частиц. Адекватным общепринятым средством для описания этих взаимодействий является концепция физического поля. Ее корни уходят в натурфилософские представления древних греков ($\alpha\pi\epsilon\iota\rho o\nu$ Анаксимандра), которые в XVI-XIX вв. трансформировались в различные эфирные модели электричества, магнетизма и теплоты. В такой исторической перспективе физические поля — это предполагаемые механизмы передачи взаимодействий от одних тел к другим. Эти механизмы действуют в пространстве и во времени и, как правило, предполагают существование субстанции (среда, эфир, вакуум) с необходимыми свойствами. Исторически первой законченной теорией поля была электромагнитная теория Максвелла.

Следует отметить, что в первоначальной количественной формулировке законов природы, понятие поля отсутствовало. Рассмотрим закон всемирного тяготения в его обычной форме, в которой представил его Ньютон в "Математических началах натуральной философии" в 1687г:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{1.1}$$

Этот закон выражает абсолютную величину силы гравитационного взаимодействия пары точечных частиц как функцию их мгновенного относительного положения и совсем ничего не говорит нам о механизме возникновения и распространения этой силы. В частности, если одна из частиц изменит свое положение, то согласно выражению (1.1), вторая сразу же "почувствует" это изменение в виде изменения действующей на нее силы и, в соответствие с третьим законом Ньютона, сама изменит свое силовое действие согласно тому же закону

(1.1). То же самое можно повторить про закон электростатического взаимодействия пары точечных зарядов (закон Кулона):

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{1.2}$$

В 1825 году Ампер опубликовал научный труд, в котором собрал и подытожил результаты своих 3-х летних кропотливых и трудоемких экспериментов, связанных с исследованием магнитного силового взаимодействия токов. Основной результат — формула, выражающая силу взаимодействия $d\vec{F}$ двух элементов тока $I_1 d\vec{l_1}$ и $I_2 d\vec{l_2}$ как функцию их относительного положения $\vec{r}$ и ориентации. В современных обозначениях ее можно записать так:

$$d\vec{F} = k\frac{I_1 I_2}{r^3}\left(2\vec{r}(d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2}) - d\vec{l_1}(\vec{r}\cdot d\vec{l_2}) - d\vec{l_2}(\vec{r}\cdot d\vec{l_2})\right) \tag{1.3}$$

($k$ — константа, зависящая от системы единиц). Выражение (1.3) имеет форму, аналогичную (1.1) и (1.2). Ни одна из приведенных нами формул не требует для своего обоснования или объяснения введения посредника взаимодействия, поскольку опирается непосредственно на наблюдения и эксперимент и выражает силу через легко измеримые пространственные характеристики физической системы. Такую формулировку законов природы принято называть *дальнодействующей,* в отличие от *близкодействующих* формулировок, которые опираются на концепцию переносчика взаимодействия — специальной среды или ее особого состояния (физического поля), необходимые для описания детального механизма передачи этого взаимодействия.

На этапе становления и развития классической физики отношение между концепциями близкодействия и дальнодействия не было антагонистичным, а иногда несколько парадоксальным образом, совмещались в трудах или мыслях одного и того же ученого-исследователя. Как уже отмечалось, Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения в дальнодействующей форме. Он неоднократно подчеркивал, что открытый им закон следует рассматривать, прежде всего, как инструмент для математического описания движения небесных тел. Осторожность Ньютона по отношению к гипотезам о природе гравитации, света, электричества и тепла и механизмах их распространения хорошо известна и является характерной особенностью его работ и научного мышления. Эта особенность достаточно рельефно выступает в следующем отрывке из его сочинения о теории цвета, где Ньютон высказывает свои мысли о природе света:

"Кто хочет, может считать, что это совокупность различных перипатетических качеств[1]. Другие могут предположить, что это множество невообразимо малых и быстрых корпускул различных размеров; эти корпускулы исходят от светящихся тел на огромных расстояниях друг от друга, но через неощутимо малые промежутки времени, и постоянно движутся вперед в соответствие с принципом движения, согласно которому вначале они ускоряются до того момента, когда сопротивление эфирной среды становится равным силе этого принципа. Это весьма похоже на то, как тело, брошенное в воду, сначала тоже ускоряется, но затем сопротивление воды становится равным силе тяжести. Те, кому это не нравится, могут представить свет как любое другое телесное излучение, как любой импульс или движение любой другой среды, как движение эфирного пара, который рассеивается в основном теле эфира, или как все то, что они могут счесть уместным для этой цели. Чтобы избежать ненужных споров и сделать эту гипотезу общей, пусть каждый представляет то, что ему нравится, но при одном условии: каким бы ни был свет, он состоит из лучей, которые отличаются друг от друга по случайным параметрам: величине, форме или энергии" [1, с.38].

Как видно из этого отрывка, Ньютон отчетливо разделял философскую (истолковательную) часть физических теорий от их описательной части, которая целиком должна опираться на наблюдения и эксперимент. Несмотря на такую научную беспристрастность, Ньютон (как и многие другие его современники и последователи, находящиеся под влиянием механистической эфирной теории вселенной Декарта) все же считал необходимым найти правильную эфирную (т.е. близкодействующую) модель света, тяготения, электричества и тепла и даже писал, что полагать, "что одно тело может воздействовать на другое, находящееся от него на некотором расстоянии, через вакуум без каких-либо "посредников", … — для меня настолько абсурдно, что по-моему, ни один человек, обладающий хотя бы малейшим представлением о философских материях, не может в это верить." [1, с.49]

[1]Это словосочетание отсылает читателя к физике Аристотеля, которая вплоть до Нового Времени, являлась основным авторитетным источником сведений по физике, физической терминологии и правилам натурфилософских рассуждений.

Труд Ампера, о котором шла речь выше, был представлен самим автором полностью в духе дальнодействия[2]. Через полвека Максвелл, который активно использовал эфирные представления для объяснения электромагнитных явлений, назовет труд Ампера "одним из самых блестящих научных достижений", а самого Ампера — "Ньютоном электричества". В частности, он пишет:

"Форма ее [работы Ампера *С.С.К.*] совершенна, строгость безупречна и все резюмируется в одной формуле [формуле (1.3) *С.С.К.*], из которой можно вывести все явления и которая должна будет остаться навсегда в качестве фундаментальной формулы электродинамики" [1, с.115].

Однако полевые представления во второй половине XIXв. уже прочно вошли в обиход физиков, а концепция близкодействия стала рабочим инструментом. В свете этих событий нетрудно понять мнение Хевисайда по поводу той же формулы (1.3), которое он высказал в 1888 году:

"Ученые, не менее авторитетные, чем великий Максвелл, утверждали, что закон силы между двумя элементами тока — основная формула электродинамики. Если бы это было так, разве мы не применяли бы его всегда? А применяем ли мы его *вообще*? Использовал ли его Максвелл в своем трактате? Я уверен, что здесь какая-то ошибка. Я ничуть не хочу лишить Ампера чести называться отцом электродинамики; я всего лишь хочу передать звание основной другой его формуле, выражающей механическую силу, которая действует на элемент проводника, несущего ток в любом магнитном поле — векторное произведение тока и электромагнитной индукции. В этой формуле есть нечто реальное; она не похожа на формулу силы между двумя незамкнутыми элементами; она фундаментальна; и, как всем известно, ее постоянно используют, прямо или косвенно (через электродвижущую силу), как теоретики, так и практики"[1, с.115].

Как явствует из приведенного отрывка, электрическим и магнитным полям в последней четверти XIXв. физики придавали приоритетный статус физической реальности.

Перенесемся теперь на столетие вперед. Несмотря на то, что концепция физического поля претерпела ряд существенных изменений

[2]Ампер высказывает в самом начале своей работы два соображения о природе магнитного взаимодействия и природе электрического тока, но нигде в последующем изложении своих результатов не использует их.

и уточнений в связи с открытием и развитием теории относительности и квантовой теории, ее роль и место в устоявшейся физической картине мира значительно укрепились.

Обратимся к соответствующей статье современной физической энциклопедии.

"**Взаимодействие в физике** — воздействие тел или частиц друг на друга, приводящее к изменению состояния их движения. В механике Ньютона взаимное действие тел друг на друга характеризуется силой. Более общей характеристикой взаимодействия является потенциальная энергия.

Первоначально в физике утвердилось представление о том, что взаимодействие между телами может осуществляться непосредственно через пустое пространство, которое не принимает никакого участия в передаче взаимодействия; при этом передача взаимодействия происходит мгновенно. Так, считалось, что перемещение Земли должно сразу же приводить к изменению силы тяготения, действующей на Луну. В этом состояла, так называемая, концепция дальнодействия.

Однако данные представления были оставлены, как не соответствующие действительности после открытия и исследования электромагнитного поля. Было доказано, что взаимодействие электрически заряженных тел осуществляется не мгновенно и перемещение одной заряженной частицы приводит к изменению сил, действующих на другие частицы, не в тот же момент, а спустя конечное время. В разделяющем частицы пространстве происходит некоторый процесс, который распространяется с конечной скоростью. Соответственно, имеется "посредник", осуществляющий взаимодействие между заряженными частицами. Этот посредник был назван электромагнитным полем. Каждая заряженная частица создает электромагнитное поле, действующее на другие частицы. Скорость распространения электромагнитного поля равна скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^{10}$см/с. Возникла новая концепция близкодействия, которая позже была распространена и на любые другие взаимодействия. Согласно этой концепции, взаимодействие между телами осуществляется посредством тех или иных полей, непрерывно распределенных в пространстве. Так всемирное тяготение осуществляется гравитационным полем ..." [2].

Для полноты картины общепринятой точки зрения на взаимоотношения теории поля и дальнодействия обратимся к учебным пособиям и монографиям по физике.

"С точки зрения теории действия на расстоянии существование электромагнитных волн абсолютно непонятно. Поэтому после опытов Герца вопрос о характере электродинамических взаимодействий был однозначно решен в пользу теории поля" [3, п.1.5].

"В классической механике поле является лишь некоторым способом описания физического явления — взаимодействия частиц. В теории же относительности благодаря конечности скорости распространения взаимодействий положение вещей существенным образом меняется. Силы, действующие в данный момент на частицу, не определяются их расположением в этот момент. Изменение положения одной из частиц отражается на других частицах лишь спустя некоторый промежуток времени. Это значит, что поле само по себе становится физической реальностью. Мы не можем говорить о непосредственном взаимодействии частиц, находящихся на расстоянии друг от друга. Взаимодействие может происходить в каждый момент лишь между соседними точками пространства (близкодействие). Поэтому мы должны говорить о взаимодействии одной частицы с полем и о последующем взаимодействии поля с другой частицей" [4, с.67].

"Итак, приняв ОТО (общую теорию относительности), мы должны отказаться как от фундаментального принципа — закона сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля, так и от концепции классического поля. Но это очень большая потеря, и мы были бы слишком легкомысленны, если бы без должных экспериментальных оснований согласились на нее. Отсюда один выход — отказаться от ОТО: В основе нашей теории лежит представление о гравитационном поле как физическом поле в духе Фарадея-Максвелла, обладающем энергией-импульсом. . . " [5, с.217].

Эти цитаты (при желании можно найти и массу других) наглядно иллюстрируют современную общепринятую точку зрения на роль и место физических полей в современной физике с одной стороны и на дальнодействие — с другой:

1. *Концепция физического поля необходима для правильного учета релятивистских и квантовых закономерностей природы и истолкования экспериментов.*

2. *Физические поля — реальность, которая прямо или косвенно проявляет себя в многочисленных экспериментах или даже в повседневном опыте.*

3. *Концепция дальнодействия была небольшим историческим эпизодом в период, предшествующий электромагнитной теории*

*Максвелла. Она несовместима с принципами теории относительности, квантовой теории и простыми (например, электродинамическими) экспериментами.*

Цель настоящей работы — показать, что сложившаяся точка зрения на близкодействие и дальнодействие, является, в лучшем случае, общепринятой рабочей "научной философией", а не истиной, с необходимостью следующей из фундаментальных принципов физики или эксперимента. Другими словами, полевая картина природы — это одно из правил нашего мышления об окружающем мире. Но возможны и другие правила. Мы постараемся показать, что такие правила могут быть сформулированы в рамках концепции дальнодействия. Эти правила разрабатывались (правда, может быть не слишком заметно для широкой научной общественности) в течение столетия, через которое мы перешагнули в нашем введении. Выводы, к которым мы приходим в конце, таковы:

1. *Весь комплекс имеющихся экспериментальных электродинамических фактов может быть, в принципе, описан и объяснен в рамках концепции дальнодействия, полностью согласующейся с принципами теории относительности и квантовой теории.*

2. *Физические поля не могут иметь статус объективной реальности, если только сама концепция объективной реальности не зависит от выбора научной философии.*

3. *Физическая картина мира, построенная в рамках концепции дальнодействия, в определенном смысле, шире полевой картины мира, и в некоторых отношениях ближе по духу представлениям квантовой теории и теории относительности.*

Перед тем, как отправиться в путешествие длиной примерно в одно столетие, приведем цитату из лекций по физике одного из творцов современного дальнодействия — Ричарда Фейнмана. В ней он кратко выражает свою точку зрения о том, что лучше или что правильнее: близкодействие или дальнодействие?

"Единственно разумная постановка вопроса — спросить, какой путь рассмотрения электрических эффектов наиболее удобен. Одни предпочитают представлять их как взаимодействие зарядов на расстоянии и пользоваться сложным законом. Другим по душе силовые линии..." [6, с.25].

## 2. Немного истории

Идеи новой физики, воплощенные Ньютоном в дальнодействующей формулировке закона всемирного тяготения и оптической теории, не связанные конкретными эфирными механизмами получили всеобщее признание не сразу даже в Англии. В 1690-х физику в Кембридже еще изучали по переводу учебника Рохо — французского картезианца. На континенте изменения шли еще медленнее, по причинам скорее психологического, чем принципиального порядка. Вот что писал Вольтер по этому поводу в 1734 году:

"Людей раздражает не само явление, а его название. Если бы в своей замечательной философии Ньютон не использовал слово *притяжение*, то каждый член нашей Академии увидел бы в ней истину; но, к сожалению, в Лондоне он использовал слово, к которому в Париже относятся с насмешкой, и только поэтому о нем составили неблагоприятное суждение столь поспешно, что в скором будущем эта поспешность вряд ли сделает большую честь его оппонентам." [1, с.50]

Лейбниц в Германии интерпретировал закон всемирного тяготения в форме Ньютона как возвращение к схоластическим идеям Фомы Аквинского о *скрытых качествах*, которые наука Нового времени отбросила как несостоятельные. В ответ на это неприятие учения Ньютона на континенте в Англии появилась даже организованная оппозиция воззрениям Декарта, которая провозгласила формулировку Ньютона о действии на расстоянии как единственно верную, отражающую результаты наблюдений и не использующую сомнительных гипотез, которые нельзя проверить экспериментально. Здесь уместно отметить, что мнения сторон в этой ситуации более или менее точно выражают две научно-философских установки, которые существуют и по сегодняшний день. Согласно первой — будем называть ее условно *метафизической* — (связанной с именами Декарта, Гюйгенса и их многочисленных последователей), научные исследования не должны ограничиваться только наблюдаемой областью явлений, но также должны обращаться и к скрытым для эксперимента предполагаемым сущностям и явлениям (в современной физике это потенциалы, волновая функция, дополнительные измерения и т.д.). Согласно второй, — будем называть ее *операциональной* или *прагматической* — связанной со сторонниками Ньютона[3] (Котс) и последователями (Бошкович, Ампер, Мах), главная цель науки — правильное описание экспериментальных фактов, свободное от вспомогательных понятий и сущностей, недоступных для непосредственной экспериментальной проверки. Можно сказать, что *в классический период развития физики концепция близкодействия часто (хотя и не всегда) сопутствовала метафизической философии науки, а концепция дальнодействия — прагматической.*

Успех теории тяготения Ньютона в XVIIв. в объяснении практически всех наблюдаемых явлений в Солнечной системы и практическая бесполезность исследования свойств предполагаемых посредников, способствовал распространению прагматического принципа, который даже стал предметом научной моды. В середине этого века хорватский иезуит Бошкович, который был первым сторонником идей Ньютона в Италии, предпринял программную попытку объяснить все наблюдаемые физические явления с позиций действия на расстоянии. В результате, несмотря на успех волновой теории Гюйгенса, эфирные модели света на время ушли в тень, а предметом исследования и развития стали корпускулярные теории.

Следующим этапом в развитии концепции дальнодействия стали неопубликованные работы Гаусса, о которых мы узнаем из его личной переписки с Вебером. В одном из писем, датированном 19 марта 1845г., Гаусс писал:

> "Я бы без сомнения, давно опубликовал результаты моих исследований, если бы в то время не забросил их, поскольку мне не удалось найти то, что я считал краеугольным камнем: *Nil actum reputans si quid superesset agendum* [Пока не все сделано, считай, что ничего не сделано (*лат.*)], а именно, — вывод добавочных сил, дополняющих взаимодействие покоящихся электрических зарядов, когда они оба находятся в движении, из действия, которое распространяется не мгновенно, но с течением времени, как в случае света..." (цитируется по [7]).

Попытки Гаусса пришлись на время активной разработки полевой электромагнитной теории. Ее успех, а также появление на свет

[3] Взгляды самого Ньютона нельзя с определенностью отнести к какому-либо из обсуждаемых направлений.

теории относительности и квантовой теории оставили идеи Гаусса без продолжения вплоть до начала XXв.

Начало современного этапа теорий дальнодействия было положено в ранней работе Шварцшильда [8] (1903г.), программной работе Тетроде [9] (1922г.), интересной в идейном отношении работе Льюиса [10] (1926г.), а также серии работ Фоккера [11] (1929-1932), в которых математическая формулировка электромагнитного дальнодействия оказалась наиболее изящной и адекватной существу вопроса.

Новая дальнодействующая формулировка теории электромагнитных взаимодействий учитывала конечность их распространения и находилась в согласии с теорией Максвелла и с принципами специальной теории относительности (т.е. была лоренц-инвариантна). Оставались нерешенными две тесно связанные друг с другом проблемы:

1. Симметричный во времени характер теории;

2. Объяснение необратимости излучения, проявляющейся в т.н. силе радиационного трения.

Первая трудность была связана с тем, что в новой теории запаздывающие и опережающие взаимодействия *всегда присутствуют в одинаковой пропорции.* Напомним, что запаздывающие взаимодействия на обычном полевом языке соответствуют ситуации, когда электромагнитная волна, испущенная источником в момент времени $t_1$ попадает к приемнику в момент времени $t_2 > t_1$, т.е. более поздний. Напротив, опережающие взаимодействия соответствуют ситуации испускания и приема, когда $t_2 < t_1$, т.е. сигнал путешествует в прошлое. Теория Максвелла также допускает как запаздывающие, так и опережающие взаимодействия, но в отличие от теории Фоккера-Тетроде, содержит их *в произвольной пропорции.* Другими словами, общее решение уравнений Максвелла представляет собой сумму с произвольными константами волны бегущей в будущее и волны бегущей в прошлое. Исходя из общих соображений причинности, константу перед опережающей частью решения зануляют, а константу перед запаздывающим решением находят из начально-краевых условий. Теория Фоккера-Тетроде не содержит произвольных констант и попытка убрать опережающее взаимодействие "руками" будет выглядеть слишком искусственной. С другой стороны, если на время допустить симметричный характер электродинамики, то возникает вопрос о ее причинности: причинное описание природы обязательно предполагает упорядоченность во времени причины и следствия, а в теории Фоккера-Тетроде любая частица в любой взаимодействующей паре одновременно является и источником и приемником, т.е. привычная временная упорядоченность причины и следствия нарушается.

В, частности, к теории Фоккера-Тетроде возникает законный вопрос: как она объясняет необратимый характер излучения ускоренно движущегося заряда? В симметричной теории заряд должен симметрично как излучать, так и поглощать. Другими словами, наряду с силой радиационного торможения, которая при нерелятивистских скоростях описывается выражением:

$$\vec{F}_R = \frac{2q^2}{3c^3}\dddot{\vec{x}}(t), \tag{2.4}$$

где $q$ — заряд частицы, $\vec{x}(t)$ — ее нерелятивистский закон движения, должна наблюдаться и сила радиационного ускорения, а наряду с потоком энергии ускоренного электрона в будущее, должен существовать симметричный поток энергии в прошлое.

А как решает эти трудности классическая теория Максвелла? На самом деле, *в стандартной электродинамике не существует физически ясного механизма необратимости излучения ускоренно движущегося заряда.* Так, в [4] выражение для радиационной силы трения выводится на основе разложения релятивистской функции Лагранжа по степеням $1/c$. При таком подходе за радиационную силу трения отвечает поправка второго порядка к запаздывающему векторному потенциалу, через который выражается функция Лагранжа. Однако, если с самого начала функцию Лагранжа выражать через опережающий потенциал, эта поправка вместе с получающейся силой трения будет иметь противоположный знак и радиационное трение сменится радиационным ускорением (или наоборот). Первая попытка описать механизм радиационной силы трения была сделана Лоренцем [12], который рассматривал электрон в виде упругого заряженного шара, отдельные части которого связаны неэлектромагнитными силами и, взаимодействуя друг с другом посредством запаздывающего электромагнитного взаимодействия, могут деформироваться и колебаться. Выражение для силы радиационного трения в такой модели Лоренц получил в виде ряда по степеням $\omega a/c$, где $\omega$ — частота колебаний частицы, $a$ — ее размер. Первый член этого ряда давал стандартное нерелятивистское выражение (2.4) для радиационной силы трения. Следующие члены становились существенными при увеличении частоты колебаний частицы. Ввиду спекулятивности моделирования внутренней структуры частиц (отметим, что внутреняя структура электрона до сих пор никак себя не проявила) и трудностью ее релятивистского обобщения, теория Лоренца была оставлена. Вместо рассмотрения механизмов, Дирак в [13] предложил следующий относительно простой рецепт для вычисления этой силы: находим поле движущегося заданным образом заряда из уравнений Максвелла, и в точке нахождения самого заряда берем половину разности запаздывающей и опережающей компонент этого поля. Полученная величина, умноженная на заряд, и будет представлять собой силу радиационного трения. Дирак показал, что именно такая комбинация опережающего и запаздывающего решений не содержит кулоновской сингулярности и в нерелятивистском пределе дает известное выражение (2.4). Кроме того, этот рецепт нетрудно использовать для вывода релятивистского выражения этой силы. Совершенно ясно, однако, что правильно угаданный рецепт вычисления силы радиационного трения не снимает вопроса о ее физической природе.

Неожиданное и красивое решение этих проблем в рамках теории дальнодействия было получено в 1945г. в работе Уилера и Фейнмана "Взаимодействие с поглотителем как механизм излучения" (Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation) [14]. Эта работа, вопреки сложившемуся в настоящее время мнению, не только полностью вернула концепции дальнодействия право на жизнь. Она предложила новый взгляд на причинность и послужила, по признанию самого Фейнмана, важной вехой для разработки первой квантовой теории поля — квантовой электродинамики[4]. В одном из примечаний авторы объясняют, что излагаемые ими результаты представляют собой третью часть большой работы, посвященной критике классической теории поля, которую они начали еще в 1941г., но вынуждены были прервать в связи со второй мировой войной. Первые две части, включающие анализ слабых квантовых эффектов в пределе $\hbar \to 0$ и изложение дальнодействующей теории Фоккера и Шварцшильда как инструмента для анализа классической теории поля, повидимому остались неопубликованными. Авторы признаются, что в

[4]Именно за разработку этой теории Фейнману вместе с Томонагой и Швингером была присуждена Нобелевская премия в 1965г.

своей предварительной публикации 1941г. [15] они не ссылались на работу Тетроде, так как узнали о ней позже от Эйнштейна. Между тем, ключевая идея их статьи 1945г. содержалась именно в этой работе Тетроде:

"Солнце не излучало бы, если бы находилось одно в пространстве и не было других тел, способных поглотить его излучение... Если, к примеру, я наблюдал вчера вечером в свой телескоп звезду, удаленную от нас, скажем на 100 световых лет, то не только я знал, что свет, который эта звезда послала в мой глаз, был испущен ей 100 лет назад, но также и звезда или ее отдельные атомы уже сто лет назад знали, что я, в то время еще не существующий, должен наблюдать ее вчера вечером в определенное время... Соответственно, следует принять точку зрения, что количество вещества во вселенной определяет скорость излучения. Это будет не всегда обязательно так, поскольку два конкурирующих поглощающих центра могут не давать устойчивой согласованной картины, но будут интерферировать друг с другом. Только в том случае, когда количество вещества достаточно велико и оно распределено в некоторой степени равномерно во всех направлениях, его дальнейшее добавление вполне может не изменять полной картины."

На этом этапе мы остановим наш исторический обзор и обсудим теорию Фоккера-Тетроде вместе с работой Уилера и Фейнмана более подробно. Для изложения современного варианта теории электромагнитного дальнодействия нам потребуются некоторые базовые сведения из теории поля. Для замкнутости изложения их нестрогий, но интуитивно понятный и достаточно подробный обзор приведен в Приложении вместе со ссылками на более обстоятельные руководства.

В нашем изложении 4-векторы и 4-тензоры изображаются готическими буквами, 3-мерные векторы обозначаются латинскими буквами со стрелкой. Греческие индексы нумеруют пространственно-временные компоненты 4-мерных объектов, латинские без скобок — их 3-мерные компоненты. Латинские индексы в круглых скобках нумеруют частицы. Временные компоненты имеют индекс 0. Сигнатура метрики пространства-времени принята в виде $(+,-,-,-)$. Скалярное произведение всегда обозначается точкой. 4-мерные дифференциальные операции обозначаются символами, начинающимися с большой буквы.

# 3. Классическая теория прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия

Общий обзор теорий дальнодействующего типа можно найти в единственной на русском языке монографии [17], которая уже давно стала библиографической редкостью. Мы ограничимся изложением классической электродинамики в дальнодействующей формулировке, дополняя материал упомянутой монографии информацией, взятой из наиболее важных оригинальных статей.

## 3.1. Принцип действия Фоккера-Тетроде

Действие Фоккера-Тетроде, предложенное в работах [9, 11], описывает систему непосредственно (т.е. без посредников типа электромагнитного поля) взаимодействующих электромагнитным образом частиц с массами $m_{(i)}$ и зарядами $q_{(i)}$ $(i = 1, \ldots, N)$ в 4-мерном мире Минковского. Наводящие соображения, которые позволяют установить его общий вид, следующие:

1. В пределе незаряженных частиц ($q_{(i)} \to 0$) действие должно переходить в действие свободных частиц (в виде суммы слагаемых типа (C.111)).
2. Взаимодействие частиц имеет парный характер (т.е. взаимодействие совокупности частиц сводится к взаимодействиям всевозможных пар этой совокупности).
3. Выражение, описывающее взаимодействие пары частиц симметрично относительно перестановки частиц (обобщенный третий закон Ньютона).
4. Взаимодействие имеет релятивистски-инвариантный характер, т.е. описывается 4-мерно ковариантными выражениями.
5. Соответствия с уравнениями теории поля.

Пункт 1 из этого списка позволяет представить искомое действие в виде:

$$\mathcal{A}^{FT} = \mathcal{A}_0^{FT} + \mathcal{A}_{\rm int}^{FT}, \tag{3.5}$$

где

$$\mathcal{A}_0^{FT} = -\sum_{i=1}^{N} m_{(i)} c \int\limits_{\gamma_{(i)}} ds_{(i)} \tag{3.6}$$

— действие системы невзаимодействующих частиц, $\mathcal{A}_{\text{int}}^{FT}$ — действие прямого взаимодействия, которое в силу соображений пунктов 2-5 можно представить в виде:

$$\mathcal{A}_{\text{int}}^{FT} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_{(i)} q_{(j)}}{c} \int\limits_{\gamma_{(i)}} \int\limits_{\gamma_{(j)}} \delta(s^2_{(i)(j)}) (\mathfrak{u}_{(i)} \cdot \mathfrak{u}_{(j)})\, ds_{(i)} ds_{(j)}. \tag{3.7}$$

Здесь индексы $i$ и $j$ нумеруют различные частицы, $\gamma_{(i)}$ — мировая линия $i$-ой частицы, $ds_{(i)}$ — ее линейный элемент,

$$s^2_{(i)(j)} = (x^0_{(i)} - x^0_{(j)})^2 - (x^1_{(i)} - x^1_{(j)})^2 - (x^2_{(i)} - x^2_{(j)})^2 - (x^3_{(i)} - x^3_{(j)})^2$$

— 4-мерный интервал между некоторыми положениями $i$-ой и $j$-ой частицами на их мировых линиях, $\mathfrak{u}_{(i)}$ — 4-скорость на мировой линии $i$-ой частицы. Множитель $1/2$ перед суммой в правой части (3.7) учитывает, что сумма по $i \neq j$ симметричных по $i$ и $j$ выражений будет содержать по два одинаковых слагаемых.

Разумеется, соображения пунктов 1,2,3,4, кроме выражения для действия взаимодействия (3.7), допускают и множество других (например, вместо 4-скоростей можно подставить 4-ускорения и т.д.). Вид (3.7) однозначно получается, если учесть все пять пунктов, но последний пункт 5 мы обсудим отдельно в следующем разделе.

Отметим некоторые характерные особенности действия Фоккера-Тетроде (3.5)-(3.7).

1. В отличие от стандартного действия (D.138), действие Фоккера-Тетроде не содержит компонент электромагнитного поля. Оно формулируется в терминах интегральных характеристик частиц (их масс и зарядов), их кинематических характеристик (4-скоростей) и пространственно-временных отношений между парами частиц (расстояний и промежутков и времени). По своей сути такая формулировка электромагнитной теории вполне аналогична дальнодействующим формулировкам законов гравитационного и электростатического взаимодействия (1.1)-(1.2).

2. В отличие от нерелятивистких формул (1.1)-(1.2), действие Фоккера-Тетроде имеет изначально 4-мерно ковариантный вид, поскольку формулируется в терминах 4-мерных скаляров и векторов и инвариантных операций с ними (4-мерное скалярное произведение, интегрирование вдоль мировых линий). Таким образом, *теория Фоккера-Тетроде представляет собой релятивистский вариант теории дальнодействия, в которой конечность скорости распространения взаимодействия оказывается автоматически учтенной в структуре пространства-времени Минковского.*

3. Выражение $\delta(s^2_{(i)(j)})$ под знаком интеграла в (3.7), согласно основному свойству $\delta$-функции, дает отличный от нуля вклад только тогда, когда $s^2_{(i)(j)} = 0$. Это означает, что взаимодействие между любой парой частиц имеет место лишь в моменты их *релятивистского контакта*, которому, на обычном языке теории поля, соответствует обмен электромагнитным сигналом, распространяющимся со скоростью $c$. Таким образом, теорию Фоккера-Тетроде можно назвать *теорией релятивистского близкодействия.* Геометрически, взаимодействие происходит между теми точками двух мировых линий, которые лежат на световом конусе любой из точек (рис.3.1).

4. Замена $t \to -t$ не изменяет вида действия (3.7). Это означает, что электромагнитное взаимодействие теории Фоккера-Тетроде симметрично во времени. Рассмотрим пару частиц, лежащих на световом конусе, т.е. испытывающих релятивистское контактное взаимодействие. Их временные координаты будут обязательно различными и мы говорим, что одна частица рассматривается в "более поздний момент времени" чем другая. Такое разделение на "раньше" и "позже", однако, имеет в рассматриваемой теории условный, а точнее говоря, искусственный характер, именно потому, что в силу пункта 3 частицы взаимодействуют симметрично: воздействие "прошлой" частицы на "будущую" точно такое же, как и воздействие "будущей" частицы на "прошлую". На самом деле, это

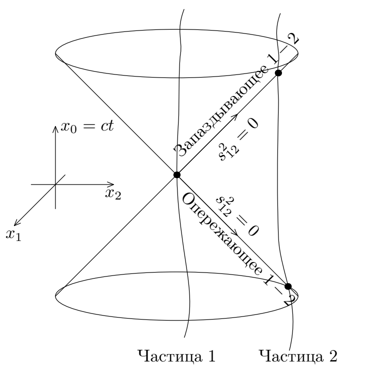


Рис. 3.1. Релятивистский контакт прямовзаимодействующих частиц.

очень естественное свойство фундаментального парного взаимодействия, каковым выступает электромагнитное взаимодействие в теории Фоккера-Тетроде. Введение стрелы времени на уровне парного взаимодействия обязательно нарушило бы его симметричность и потребовало бы искусственных "причинных правил отбора" в духе теории поля. Мы увидим, что причинность наблюдаемого электромагнитного взаимодействия в теории Фоккера-Тетроде возникает как статистический эффект взаимодействия большого числа частиц, а теорию поля с ее изначально причинным характером взаимодействия следует рассматривать как некоторую "эффективную теорию", в которой учет коллективного взаимодействия уже произведен.

5. В отличие от действий полевого типа, действие взаимодействия $\mathcal{A}_{\mathrm{int}}^{FT}$ не является локальным. Это приводит к ряду технических трудностей, от которых свободна теория поля. Об этих трудностях речь пойдет в разделе 7.

## 3.2. Соответствие с электродинамикой Фарадея-Максвелла

Действие Фоккера-Тетроде (3.5)-(3.7) для одной выделенной частицы с номером $i$ можно тождественно переписать в более привычном для теории поля виде (D.138):

$$\mathcal{A}_{(i)}^{FT} = -m_{(i)}c \int\limits_{\gamma_{(i)}} ds_{(i)} - \frac{q_{(i)}}{c} \int\limits_{\gamma_{(i)}} (\mathfrak{A}_{(i)} \cdot \mathfrak{u}_{(i)})\, ds_{(i)}, \tag{3.8}$$

где введено формальное обозначение:

$$\mathfrak{A}_{(i)} \equiv \sum_{j \neq i} \frac{q_{(j)}}{c} \int\limits_{\gamma_{(j)}} \delta(s_{(i)(j)}^2) \mathfrak{u}_{(j)}\, ds_{(j)} \tag{3.9}$$

для векторного потенциала $\mathfrak{A}_{(i)}$, создаваемого всеми зарядами $q_{(j)}$ кроме заряда $q_{(i)}$ в точке нахождения последнего. Следует отметить, что в отличие от теории поля, эта величина (из-за присутствия множителя $\delta(s_{(i)(j)}^2)$ под интегралом) определена только на мировой линии заряда $q_{(i)}$. В частности, если все мировые линии зарядов $q_{(j)}$ удалить на пространственную бесконечность, то величина $\mathfrak{A}_{(i)} \to 0$.

Мы обсудим это важное свойство теории Фоккера-Тетроде в разделе 6.

Повторяя практически без изменений вывод формулы (D.144) Приложения D.3, приходим к стандартному уравнению движения заряженной частицы в "электромагнитном поле":

$$\mathfrak{a}_{(i)\alpha} = \frac{q_{(i)}}{m_{(i)}c^2}\mathfrak{F}_{(i)\alpha\beta}\mathfrak{u}^{\beta}, \tag{3.10}$$

где формальный "тензор напряженности электромагнитного поля" на мировой линии $i$-ого заряда определен формулой:

$$\mathfrak{F}_{(i)\alpha\beta} = \frac{\partial\mathfrak{A}_{(i)\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial\mathfrak{A}_{(i)\alpha}}{\partial x^{\beta}}. \tag{3.11}$$

Отметим, что производные $\mathfrak{A}_{(i)}$ по координатам $i$-ой частицы должны пониматься в обобщенном смысле (см. Приложение B).

Из структуры выражения (3.11) сразу следует выполнимость (в обобщенном смысле) пары уравнений Максвелла без источников (формула (D.128 Приложения D.1). Для проверки выполнимости второй пары используем формулу (B.97). Эта формула явным образом демонстрирует симметричный во времени и, следовательно, непричинный характер парных взаимодействий в электродинамике Фоккера-Тетроде. В силу представления (B.97) и определения (B.90) функции Грина, имеем следующую цепочку равенств с формальным векторным потенциалом (3.9):

$$\Box_{(i)}\mathfrak{A}_{(i)} = \Box_{(i)}\sum_{j\neq i}\frac{q_{(j)}}{c}\int\limits_{\gamma_{(j)}}\delta(s^2_{(i)(j)})\mathfrak{u}_{(j)}\,ds_{(j)} =$$

$$\sum_{j\neq i}\frac{q_{(j)}}{c}\int\limits_{\gamma_{(j)}}\Box_{(i)}\delta(s^2_{(i)(j)})\mathfrak{u}_{(j)}\,ds_{(j)} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{J}, \tag{3.12}$$

где полный 4-ток определен как сумма $\sum\limits_{j}\mathfrak{J}_{(j)}$, а 4-ток заряда $q_{(j)}$ определен выражением:

$$J_{(j)}(x) = q_{(j)}\int\limits_{\gamma_{(j)}}\delta^4(x - x_{(j)})\mathfrak{u}_{(j)}\,ds_{(j)},$$

обобщающим 3-мерное выражение (B.86). Предположим теперь, что система зарядов, описываемых действием Фоккера-Тетроде, финитна, т.е. во все моменты времени сосредоточена внутри конечного объема, причем размер $L$ области занимаемой зарядами и время $T$ эволюции системы удовлетворяют сильному неравенству: $L \ll cT$. При таком предположении для 4-мерной дивергенции 4-потенциала имеем цепочку равенств:

$$\mathrm{Div}_{(i)}\mathfrak{A}_{(i)} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\alpha}_{(i)}}{\partial x^{\alpha}_{(i)}} = \sum_{j\neq i} \frac{q_{(j)}}{c} \int\limits_{\gamma_{(j)}} \frac{\partial \delta(s^2_{(i)(j)})}{\partial x^{\alpha}_{(i)}}\, dx^{\alpha}_{(j)} = \tag{3.13}$$

$$-\sum_{j\neq i} q_{(j)} \int\limits_{\gamma_{(j)}} \frac{\partial \delta(s^2_{(i)(j)})}{\partial x^{\alpha}_{(j)}}\, dx^{\alpha}_{(j)} = -\sum_{j\neq i} q_{(j)} \delta(s^2_{(i)(j)})|^{t_{(j)}=+\infty}_{t_{(j)}=-\infty} = 0.$$

Здесь после второго знака равенства использовано то обстоятельство, что $\delta(s^2_{(i)(j)})$ зависит лишь от разностей координат и следовательно

$$\partial\delta(s^2_{(i)(j)})\partial x^{\alpha}_{(i)} = -\partial\delta(s^2_{(i)(j)})/\partial x^{\alpha}_{(j)}.$$

Последний знак равенства в (3.13) вытекает из неравенства $L \ll cT$: "начала" и "концы" мировых линий зарядов $q_{(j)}$ лежат внутри светового конуса с вершиной в некоторой точке мировой линии заряда $q_{(i)}$, следовательно $\delta(s^2_{ij})|_{t_{(j)}\to\pm\infty} = 0$ (см. рис. 3.2).

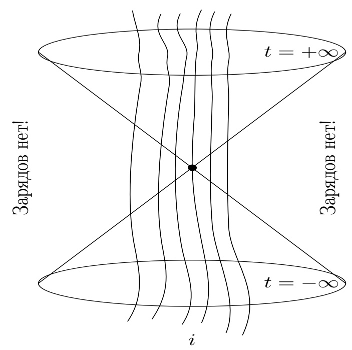



Рис. 3.2. Финитная система прямовзаимодействующих частиц.

Другими словами, *формальный 4-вектор-потенциал в электродинамике Фоккера-Тетроде финитной системы частиц в бесконечной во времени вселенной в силу своего определения удовлетворяет калибровке Лоренца.* Этот факт можно было бы вывести и из общих соображений: из характеристик зарядов нельзя построить релятивистски-инвариантную величину, имеющую размерность напряженности поля.

С учетом (3.12) и (3.13) имеем:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_{(i)\alpha}{}^{\beta}}{\partial x^{\beta}_{(i)}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}_{(i)}} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}^{\beta}_{(i)}}{\partial x^{\beta}_{(i)}} \right) - \Box_{(i)}\mathfrak{A}_{(i)\alpha} = -4\pi\mathfrak{J}_{\alpha} \tag{3.14}$$

— тождественную выполнимость пары уравнений Максвелла с источниками (D.131). Таким образом, *электродинамика Фоккера-Тетроде находится в полном формальном соответствии с полевой электродинамикой Максвелла.* Однако, в отличие от электродинамики Максвелла, в теории Фоккера-Тетроде нет свободы в выборе характера причинности взаимодействия: парные взаимодействия симметричны во времени. Уже обсуждавшиеся выше очевидные проблемы механизмов причинности взаимодействия и радиационного трения в этой теории обусловили своеобразное отношение к ней физиков 20-30-х годов: новую теорию, в лучшем случае, воспринимали как любопытный "научный курьез", но не как серьезный конкурент общепринятой теории поля.

Благодаря оригинальным работам Фейнмана и Уилера, "слабость" теории Фоккера-Тетроде неожиданно стала ее сильной стороной.

## 3.3. Фейнман-Уилеровская теория поглотителя

### 3.3.1. Нерелятивистская формула для силы радиационного трения

В классической работе [14] Фейнман и Уиллер предложили механизм причинности и необратимости излучения в теории Фоккера-Тетроде, который связан с аккуратным учетом опережающего переизлучения частиц поглотителя. Проиллюстрируем идею авторов на простейшем примере расчета нерелятивистской силы радиационного трения. Рассмотрим заряженную частицу (будем называть ее для определенности *источником*) с зарядом $q$, массой $m$ и нерелятивистским законом движения $\vec{x}(t)$, обусловленным взаимодействием этой частицы с окружением (возможно, посредством сил не только электромагнитного происхождения). Заряженные частицы окружения с зарядами $q_{(i)}$, массами $m_{(i)}$ будем называть *поглотителем.* Относительно поглотителя сделаем максимальные упрощающие предположения. А именно, предположим, что частицы поглотителя:

1. Не связаны в атомы или молекулы;
2. Движутся относительно выделенной частицы с нерелятивистскими скоростями;
3. Достаточно разрежены;

4. Распределены в пространстве равномерно с концентрацией[5] $N$;
5. Одинаковы с точностью до знака заряда, т.е. $q_{(i)} = \pm e$, $m_{(i)} = \mu$;
6. Занимают объем, достаточный для полного поглощения излучения источника.

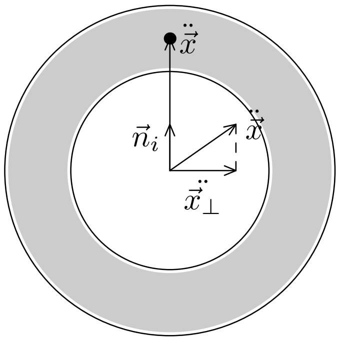



Рис. 3.3. Источник и поглотитель

Пусть источник в некоторый момент времени приобретает ускорение $\ddot{\vec{x}}(t)$ за счет электромагнитного или иного взаимодействия с окружающими частицами. Согласно электродинамике Максвелла, помимо кулоновского поля, ускоренная частица создает в окружающем ее пространстве поле излучения, которое мы в нашем элементарном расчете будем считать целиком запаздывающим. Ответ на вопрос о том, каким образом это запаздывающее излучение возникает из симметричной суперпозиции запаздывающего и опережающего, мы рассмотрим в следующем подразделе. Ввиду того, что частицы поглотителя разрежены, нас будет интересовать поле на больших расстояниях от источника. На таких расстояниях дипольная компонента излучения будет преобладающей, так как спадает с расстоянием по закону $\sim 1/r$ в отличие от статической кулоновской ($\sim 1/r^2$) и высших мультипольных компонент ($\sim 1/r^n$, $n \geq 2$) (см. Приложение D.4). Рассмотрим типичную частицу поглотителя с радиус-вектором $\vec{x}_{(i)}$. Дипольная компонента излучения в точке нахождения этой частицы характеризуется электрическим полем:

$$\vec{E}(t, \vec{x}_{(i)}) = \frac{q}{c^2 r_{(i)}} (\ddot{\vec{x}}(t'_{(i)}) \times \vec{n}_{(i)}) \times \vec{n}_{(i)} = -\frac{q\ddot{\vec{x}}_\perp(t'_{(i)})}{c^2 r_{(i)}}, \tag{3.15}$$

где $\vec{n}_{(i)}$ — единичный вектор, проведенный из источника в направлении $i$-ой частицы поглотителя, $\ddot{\vec{x}}_\perp$ — составляющая ускорения источника, перпендикулярная $\vec{n}_{(i)}$ (см. рис. 3.3). Отметим, что в выражении (3.15) ускорение источника рассматривается в момент времени

[5]Здесь и далее, если не оговорено особо, $N$ будет обозначать концентрацию, а не число частиц.

$t'_{(i)} = t - r_{(i)}/c$ более ранний, чем момент времени $t$ наблюдения поля. Электрическое поле (3.15) действует на заряд $q_{(i)}$ с силой $q_{(i)}\vec{E}(t, \vec{x}_{(i)})$ и вызывает его мгновенное ускорение[6]

$$\ddot{\vec{x}}_{(i)}(t) = q_{(i)}\vec{E}(t, \vec{x}_{(i)})/\mu. \tag{3.16}$$

Магнитную часть полной силы Лоренца можно не учитывать в силу сделанного предположения о малости скоростей поглотителя по сравнению со скоростью света. Теперь, согласно симметричной картине излучения в электродинамике Фоккера-Тетроде, $i$-ая частица поглотителя будет излучать симметрично в прошлое и будущее. Ее запаздывающее излучение, испущенное в момент $t$, будет воздействовать на источник как раз в момент $t'_{(i)}$ с силой реакции излучения $i$-ой частицы, определяемой половиной выражения (3.15):

$$\vec{F}_{(i)R} = -\frac{q_{(i)}\ddot{\vec{x}}_{(i)\perp}}{2c^2 r_{(i)}}. \tag{3.17}$$

С учетом выражений (3.15) и (3.16) для $\ddot{\vec{x}}_{(i)}$ и очевидного равенства $(\ddot{\vec{x}}_\perp)_\perp = \ddot{\vec{x}}_\perp$, приходим к следующему выражению для силы реакции $i$-ой частицы:

$$\vec{F}_{(i)R} = \frac{e^2}{2c^4 r_{(i)}^2 \mu}\ddot{\vec{x}}_\perp. \tag{3.18}$$

Для вычисления полной силы реакции необходимо проинтегрировать выражение (3.18) с множителем $N$ по всему объему, занятому поглотителем. Ясно, что эта операция включает усреднение векторного выражения (3.18) по всем направлениям. В силу изотропности распределения частиц поглотителя результат усреднения может быть

[6]На самом деле это — часть полного ускорения $i$-ой частицы, обусловленная взаимодействием с источником. Полное ускорение (в силу линейности уравнений движения и уравнений Максвелла) складывается из всех таких частей, обусловленных взаимодействием $i$-ой частицы со всеми остальными частицами поглотителя, рассматриваемыми как источники. Каждая составляющая полного ускорения порождает соответствующий "обратный отклик" на поле той частицы, которая вызвала соответствующую составляющую ускорения (см.ниже), т.е. учет влияния остальных частиц поглотителя производится аналогично.

лишь вектором, коллинеарным $\ddot{\vec{x}}$ (никаких других выделенных направлений пространства для источника не существует). Таким образом, интегрировать необходимо лишь компоненту (3.18) вдоль ускорения, равную

$$\frac{e^2}{2c^4 r_{(i)}^2 \mu} |\ddot{\vec{x}}| \sin^2(\ddot{\vec{x}}, \vec{n}_{(i)}).$$

Переходя к сферической системе координат $(\xi, \theta, \varphi)$, в которой азимутальный угол $\theta$ отсчитывается от направления $\ddot{\vec{x}}$, приходим к следующему интегральному представлению для полной силы реакции излучения:

$$\vec{F}_R = \int\limits_{R^3} \frac{e^2 N}{2c^4 \xi^2 \mu} \ddot{\vec{x}} \sin^2\theta \, dV = \frac{e^2 N}{2\mu c^4} \ddot{\vec{x}} \int\limits_{R^3} \frac{1}{\xi^2} \cdot \xi^2 \sin\theta \, d\xi \, d\theta \, d\varphi. \quad (3.19)$$

Выполняя интегрирование по углам, приходим к выражению:

$$\vec{F}_R = \frac{2e^2 \ddot{\vec{x}}}{3c^3} \frac{2\pi N e^2}{\mu c} \int\limits_0^\infty d\xi, \quad (3.20)$$

которое в отличие от известного выражения (2.4):

1. Пропорционально не второму ускорению $\dddot{\vec{x}}$, а первому $\ddot{\vec{x}}$;
2. Зависит от характеристик частиц поглотителя;
3. Принимает неограниченно большие значения, когда поглотитель занимает все пространство или зависит от его размеров в противном случае.

Фейнман и Уилер сделали замечательное наблюдение, благодаря которому появляется возможность уточнить вычисления и вместо формулы (3.20) получить правильную формулу (2.4). Они обратили внимание, что "... между исходящим излучением источника и обратной реакцией существует фазовый сдвиг, который не был учтен в предыдущих вычислениях... ". Дело в том, что исходящее от источника запаздывающее излучение распространяется в среде не со скоростью света, а со скоростью $c' = c/n$, где $n$ — показатель преломления среды. В отличие от эффективного запаздывающего сигнала, опережающее излучение, распространяющееся вспять во времени от частицы поглотителя к источнику мы должны рассматривать как элементарное фундаментальное парное взаимодействие, распространяющееся со скоростью света. В курсах физической оптики [16] показывается, что показатель преломления среды учитывает вторичное излучение частиц среды, которое накладывается на первичное излучение в среде и приводит к эффективному замедлению скорости распространения электромагнитного возмущения. Показатель преломления в общем случае зависит от частоты и для среды, состоящей из слабовзаимодействующих одинаковых заряженных частиц, имеет следующий вид [16]:

$$n = 1 - \frac{2\pi N e^2}{\mu\omega^2}. \tag{3.21}$$

Чтобы избежать интегральных дисперсионных соотношений, учитывающих зависимость коэффициента преломления от частоты, предположим теперь, что мы следим за эволюцией одной фурье-компоненты излучения. Она порождается соответствующей фурье-компонентой ускорения:

$$\ddot{\vec{x}}_\omega(t) = \ddot{\vec{x}}_{\omega 0} e^{-i\omega t}, \tag{3.22}$$

где $\ddot{\vec{x}}_{\omega 0}$ — постоянная амплитуда. С учетом свойств среды, угол сдвига фаз между ускорением источника и опережающей реакцией $i$-ой частицы поглотителя, будет определяться выражением:

$$\Delta = \omega\left(\frac{r_{(i)}}{c} - \frac{n r_{(i)}}{c}\right) = \frac{2\pi r_{(i)} N e^2}{\mu c\omega}.$$

Для учета фазового сдвига в выражении (3.20) для полной силы реакции необходимо проинтегрировать выражение $\exp(-i\Delta)$ по всем сферическим слоям поглотителя. В результате приходим к выражению:

$$\vec{F}_R = \frac{2e^2\ddot{\vec{x}}_\omega}{3c^3}\int\limits_0^\infty \frac{2\pi N e^2}{\mu c} e^{-i\Delta} d\xi. \tag{3.23}$$

Для корректного вычисления расходящегося интеграла необходимо ввести "бесконечно малое поглощение": $n \to n' = n + i\epsilon$, где $\epsilon$ — малый коэффициент поглощения среды. Подстановка, вычисление интеграла и переход к пределу $\epsilon \to 0$ приводят к цепочке равенств для интеграла:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_0^\infty \frac{2\pi Ne^2}{\mu c}e^{-(\epsilon\omega/c+2\pi iNe^2/\mu c\omega)\xi}d\xi =$$

$$-\lim_{\epsilon\to 0}\frac{2\pi Ne^2}{\mu c}\frac{e^{-(\epsilon\omega/c+2\pi iNe^2/\mu c\omega)\xi}}{\epsilon\omega/c+2\pi iNe^2/\mu c\omega}\,|_0^\infty = -i\omega.$$

Результат не зависит от конкретных свойств поглотителя! Его подстановка в выражение (3.23) с учетом (3.22) приводит к стандартному выражению силы радиационного трения для одной фурье-компоненты:

$$\vec{F}_R = \frac{2q^2\ddot{\vec{x}}_\omega}{3c^3}(-i\omega) = \frac{2q^2\dddot{\vec{x}}_\omega}{3c^3}. \tag{3.24}$$

В силу линейности и однородности преобразования Фурье, полученный результат будет справедлив для любого нерелятивистского закона движения источника.

Таким образом, *в электродинамике Фоккера-Тетроде сила радиационного трения имеет ясную физическую природу: она возникает как результат коллективного опережающего отклика частиц поглотителя на запаздывающее излучение источника.*

### 3.3.2. Запаздывающие взаимодействия и рецепт Дирака

Может показаться, что вывод выражения для радиационной силы трения, сделанный в предыдущем разделе, существенным образом опирался на сделанные предположения относительно поглотителя и источника. Фейнман и Уилер показали несколькими различными независимыми способами, что стандартное выражение для силы радиационного трения получается независимо от свойств поглотителя. Точнее говоря, поглотитель должен удовлетворять лишь одному единственному условию: он должен быть *абсолютным*, т.е. поглощать все излучение от источника. Детальные и довольно громоздкие вычисления для некоторых простых моделей поглотителя обнаруживают еще одно важное коллективное свойство симметричной электродинамики Фоккера-Тетроде: *опережающее действие частиц абсолют-*

*ного поглотителя таково, что, складываясь с собственным наполовину запаздывающим, наполовину опережающим полем источника, оно удваивает первое и уничтожает последнее, т.е. восстанавливает причинный характер излучения каждой одиночной частицы.* Доказательство этого факта в рамках теории Фоккера-Тетроде с помощью явных вычислений для модели поглотителя с довольно общими свойствами можно найти в оригинальной работе Фейнмана и Уилера. Мы воспроизведем здесь их завершающий способ рассуждений, опирающийся только на общее условие полного поглощения. Это условие означает, что любая пробная частица, помещенная снаружи поглотителя, не будет испытывать силового воздействия частиц среды. Обозначая посредством $\mathfrak{F}_-^{(i)}$ и $\mathfrak{F}_+^{(i)}$ тензоры напряженности запаздывающего и опережающего полей, создаваемых $i$-ой частицей среды, это условие математически можно записать так:

$$\sum_i \left(\frac{1}{2}\mathfrak{F}_-^{(i)} + \frac{1}{2}\mathfrak{F}_+^{(i)}\right) = 0 \quad \text{вне поглотителя.} \tag{3.25}$$

Выражение (3.25) должно обращаться в нуль вне поглотителя при $t \to \pm\infty$. Но это возможно только в том случае, когда каждая из сумм запаздывающих и опережающих полей обращается в нуль независимо (на $+\infty$ приходят только запаздывающие поля частиц, а на $-\infty$ — только опережающие):

$$\sum_i \mathfrak{F}_-^{(i)} = 0 \quad \text{вне поглотителя;} \sum_i \mathfrak{F}_+^{(i)} = 0 \quad \text{вне поглотителя.} \tag{3.26}$$

Отсюда, в свою очередь, следует что сумма разностей запаздывающего и опережающего полей в каждой точке пространства вне поглотителя обращается в нуль:

$$\sum_i \left(\frac{1}{2}\mathfrak{F}_-^{(i)} - \frac{1}{2}\mathfrak{F}_+^{(i)}\right) = 0 \quad \text{вне поглотителя.} \tag{3.27}$$

Но в отличие от выражений (3.25) и (3.26) такая комбинация полей является решением уравнений Максвелла в пустоте. Действительно, каждое из слагаемых под знаком суммы удовлетворяет уравнению Максвелла с одним и тем же источником, следовательно, в силу линейности уравнений Максвелла, их разность удовлетворяет уравнению Максвелла в пустоте. Эта комбинация описывает поле в пустоте не только в области вне поглотителя, но и внутри него, т. к. в точках нахождения зарядов она не имеет кулоновских сингулярностей (они взаимно сокращаются). Следовательно условие полного поглощения можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\sum_i \left( \frac{1}{2}\mathfrak{F}_-^{(i)} - \frac{1}{2}\mathfrak{F}_+^{(i)} \right) = 0 \quad \text{во всем пространстве.} \tag{3.28}$$

Рассмотрим теперь выделенную $k$-ую частицу поглотителя. Внешнее поле $\mathfrak{F}$, которое оказывает силовое действие на нее согласно электродинамики Фоккера-Тетроде, дается выражением:

$$\mathfrak{F} = \sum_{i \neq k} \left( \frac{1}{2}\mathfrak{F}_-^{(i)} + \frac{1}{2}\mathfrak{F}_+^{(i)} \right). \tag{3.29}$$

Выражение (3.29) можно тождественно переписать следующим образом:

$$\mathfrak{F} = \sum_{i \neq k} \mathfrak{F}_-^{(i)} + \frac{1}{2}\left( \mathfrak{F}_-^{(k)} - \mathfrak{F}_+^{(k)} \right) - \sum_i \left( \frac{1}{2}\mathfrak{F}_-^{(i)} - \frac{1}{2}\mathfrak{F}_+^{(i)} \right). \tag{3.30}$$

При условии полного поглощения последняя сумма в силу (3.28) обращается в нуль. Первое слагаемое описывает стандартное запаздывающее поле частиц поглотителя, окружающих $k$-ую частицу. Второе слагаемое описывает радиационное трение в полном соответствии с рецептом Дирака. При этом для получения явного выражения для силы радиационного трения по этому рецепту необходимо аккуратно произвести операцию вычитания двух сингулярных в точке нахождения заряда потенциалов. Надлежащий предельный переход приводит в нерелятивистском приближении к выражению (3.24), а в релятивистском (технические детали вывода можно найти в [14]) к 4-мерно ковариантному выражению:

$$\mathfrak{f}_R = \frac{2e^2}{3}\left( \mathfrak{u}(\ddot{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{u}) - \ddot{\mathfrak{a}} \right), \tag{3.31}$$

где точка обозначает дифференцирование по собственному времени. Таким образом, *электродинамика Фоккера-Тетроде, рассматриваемая на фоне абсолютного поглотителя, полностью эквивалентна стандартной полевой электродинамике Фарадея-Максвелла с ее причинным характером взаимодействия и свойством необратимости излучения.*

## 4. Стрела времени и причинность

В рассмотрениях предыдущего раздела остался в тени важный вопрос: каким образом симметричные во времени парные взаимодействия приводят к необратимому процессу потери энергии частицей и несимметричному причинному (т.е. запаздывающему) характеру взаимодействия частиц? Иными словами, откуда берется необратимость, если все фундаментальные законы, описывающие электромагнитное взаимодействие, обратимы? На первый взгляд, могло бы показаться, что необратимость вытекает из свойства абсолютного поглощения. Однако, несложный анализ обнаруживает, что это не так. Действительно, мы можем, стартуя с выражения (3.28), полностью обратить рассуждения и выполнить разложение (3.29) по другому:

$$\mathfrak{F} = \sum_{i\neq k} \mathfrak{F}_+^{(i)} - \frac{1}{2}\left(\mathfrak{F}_-^{(k)} - \mathfrak{F}_+^{(k)}\right) + \sum_i \left(\frac{1}{2}\mathfrak{F}_-^{(i)} - \frac{1}{2}\mathfrak{F}_+^{(i)}\right). \tag{4.32}$$

В выражении (4.32) запаздывающие и опережающие взаимодействия поменялись местами. При условии абсолютного поглощения последнее слагаемое снова обращается в нуль, первое слагаемое описывает антипричинную электродинамику, т.е. такую, в которой взаимодействие эффективно осуществляется электромагнитными сигналами, распространяющимися из будущего в прошлое. Второе слагаемое в (4.32) отличается от выражения для силы радиационного трения только знаком и, следовательно, описывает силу "радиационного ускорения". Если в 4-мерном мире с такой электродинамикой двигаться вспять во времени, т.е. из будущего в прошлое, то все будет происходить как обычно: частицы тормозятся, а энергия движения рассеивается в тепловую энергию поглотителя. Если же сохранить направление времени прежним, то антипричинная вселенная будет выглядеть очень странно: поведение частицы описывается ее будущим, прошлое никак не влияет на него; частицы получают энергию от поглотителя и ускоряются, при этом движение из хаотического становится все более упорядоченным. Такая картина, конечно же, полностью противоречит нашему опыту. Но обе картины теоретически одинаково возможны. Каким же образом природа находит способ выбрать одну из этих картин?

Фейнман и Уилер, вслед за Эйнштейном, приходят к выводу, что *необратимость излучения вместе с запаздывающими потенциала-*

*ми являются следствиями статистических свойств системы большого числа частиц с асимметричными начальными условиями.*

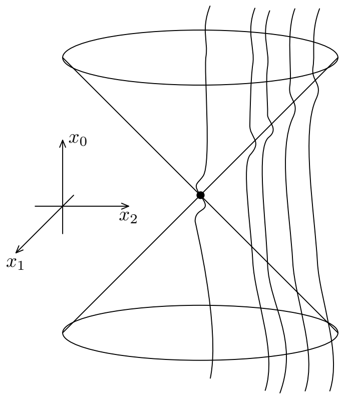



Рис. 4.1. Прошлое и будущее поглотителя имеют различные статистические свойства.

На рис. 4.1 показаны мировые линии выделенной частицы и частиц поглотителя. До того момента, пока частица не испытает ускорения и не испустит электромагнитный импульс, частицы поглотителя находятся в покое или движутся медленно. Их запаздывающее действие на источник практически отсутствует и в уравнении (3.30) доминирует слагаемое, отвечающее за радиационное трение. Напротив, опережающее действие на источник частиц поглотителя в момент их возмущения существенно, поскольку они приводятся в движение именно в тот момент в будущем, чтобы достигнуть источника в точности в момент его ускорения в прошлом. Это суммарное опережающее воздействие описывается первым слагаемым в обращенном уравнении (4.32) и оказывается равным по величине удвоенному значению силы радиационного трения. Оно уничтожает силу "радиационного ускорения" и восстанавливает нормальное значение силы трения. Другими словами, характер движения частиц в прошлом и в будущем различен: в прошлом поглотитель более упорядочен, в будущем — более хаотичен. На языке термодинамики мы описываем эту ситуацию с помощью второго начала: энтропия замкнутой системы не убывает. На практике неравновесность термодинамических систем возникает благодаря их незамкнутости. Кто-то или что-то может подействовать на равновесную термодинамическую систему извне и нарушить ее равновесие. Эти изменения можно рассматривать как "новые начальные условия". Процессы установления равновесия будут увеличивать энтропию и приведут к новому состоянию равновесия. С точки зрения электродинамики Фоккера-Тетроде неравновесная система будет причинной, а в равновесной опережающие и запаздывающие взаимодействия будут присутствовать на равных правах. Силы радиационного трения или ускорения при этом будут отсутствовать!

Возникает заманчивая, на первый взгляд, идея попытаться экспериментально обнаружить опережающие взаимодействия в изолированной равновесной системе частиц. Трудность подобных экспериментов будет заключаться в том, что систему частиц невозможно изолировать от вещества вселенной. Каждая частица пробной системы будет взаимодействовать с каждой частицей вселенной в прошлом и будущем. Но сегодня мы знаем, что вселенная асимметрична во времени: она расширяется. Будет ли расширяющаяся вселенная абсолютным поглотителем? Для ответа на этот вопрос нам необходимо перейти в область теории вселенной в целом — релятивистской космологии.

## 5. Космологический поглотитель

Исследование космологических аспектов теории действия на расстоянии, в особенности, свойств вселенной в целом как поглотителя электромагнитного излучения, исследовалось рядом авторов в 60-х — 70-х годах XX столетия. Вопрос ставился так: какие космологические модели обеспечивают "электромагнитную стрелу времени"? Другими словами, среди множества космологических моделей (как стандартных, так и довольно экзотических), авторы пытались очертить множество таких моделей, которые удовлетворяли бы условию абсолютного поглощения в будущем. Первое систематическое исследование в этом направлении было сделано Хогартом [18]. Его рассмотрения представляют собой минимальное прямолинейное обобщение модели Уилера-Фейнмана, учитывающее космологическую эволюцию вселенной. Такая эволюция приводит, по меньшей мере, к трем причинам, по которым свойства вещества вселенной как поглотителя в прошлом и будущем будут отличаться:

1. Электромагнитные волны, путешествующие в будущее расширяющейся вселенной испытывают космологическое красное смещение, в то время как волны, путешествующие в прошлое, — фиолетовое. Поскольку интенсивность взаимодействия излучения со свободными зарядами плазмы падает с ростом частоты, дисперсия излучения приближает условия поглощения к идеальным в будущем, в то время как вещество в прошлом, напротив, становится неидеальным поглотителем.

2. Плотность вещества в расширяющейся вселенной убывает со временем. Этот фактор, в отличие от предыдущего, является благоприятным для поглощения в прошлом.

3. Эффективный размер поглотителя в прошлом или будущем может быть как конечным, так и бесконечным, в зависимости от выбора модели.

Несложные рассуждения, учитывающие эти факторы, привели Хогарта к следующему выражению для силы радиационного трения в космологических моделях с плоскими пространственными сечениями, обобщающему выражение Уилера-Фейнмана (3.23) для статического мира Минковского:

$$\vec{F}_R = \frac{2q^2\dddot{\vec{x}}_{\omega_0}}{3c^3}\int\limits_0^R \frac{2\pi Ne^2}{\mu c} C^{2k}(\tau)|_{\tau=\pm r} e^{-i\Delta} d\xi, \tag{5.33}$$

где $C(\tau)$ — масштабный фактор в конформной калибровке (см. Приложение Е), $k$ — числовой коэффициент, зависящий от выбора модели, $R$ — координатный радиус поглотителя,

$$\Delta(\xi) = \mp\int\limits_0^\xi \omega(n-1)C(\tau)|_{c\tau=\pm r}\, dr \tag{5.34}$$

— фазовый сдвиг, набегающий за счет дисперсии поглощения (верхний знак относится к запаздывающим волнам, нижний — к опережающим). В последнем выражении $\omega = \omega_0/C(\tau)$ — локальная частота электромагнитной волны, рассматриваемая в точке нахождения данной части поглотителя. Космологический критерий абсолютности поглощения в будущем будет теперь заключаться в требовании, чтобы интеграл в правой части (5.33) с учетом (5.34) был равным $\pm i\omega_0$ для любой частоты синусоидальной гармоники $\omega_0$ первичного излучения. Далее, вводя поглощение (потери при столкновениях), Хогарт приходит к необходимому критерию абсолютного поглощения электромагнитного излучения в плоских космологических моделях: *эффективный радиус поглотителя и его интегральный коэффициент ослабления должны быть бесконечно большими.* Применение общих результатов к анализу конкрентных моделей привел автора к выводу, что лишь модели с масштабным фактором $R(t) \lesssim t^{1/4}$ описывают вселенную с абсолютным поглощением в будущем.

Позже Бурман [19] уточнил результат, приняв во внимание температурную зависимость коэффициента поглощения и пришел к выводу, что все модели, расширяющиеся медленнее, чем $R \sim t$, описывают вселенную с идеальным поглотителем.

Хойл и Нарликар [20] пренебрегли столкновениями и учитывали только радиационное трение в космологических моделях с непрерывным творением материи.

Наиболее ясный и простой анализ вопроса вместе с критическим обзором предыдущих работ были проведены в работе Девиса [21]. Девис показал, что простым и достаточно общим критерием абсолютного поглощения в будущем в вечно расширяющихся моделях является расходимость интеграла:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \rho\sigma\, dt \to \infty, \tag{5.35}$$

выражающего вероятность поглощения фотона частицами материи. Здесь $\rho(t)$ — плотность вещества во вселенной, $\sigma(\rho, \omega, T)$ — полное сечение поглощения фотонов веществом. Таким образом, в том случае, когда коэффициент поглощения $\rho\sigma \gtrsim t^{-1}$, космологические модели обеспечивают причинность в электродинамике Фоккера-Тетроде. Рассмотрим в качестве примера вечно расширяющиеся модели с постоянной массой вещества. В пределе при $t \to \infty$ все фотоны в вечно расширяющихся моделях неограниченно краснеют, поэтому можно рассматривать взаимодействие излучения с веществом вселенной в длинноволновом пределе. В этом пределе галактики перестают играть роль в поглощении излучения в виду их конечного предельного размера при $t \to \infty$, а в межгалактическом веществе можно учитывать лишь плазменную компоненту. В длинноволновом пределе сечение поглощения определяется лишь столкновительными потерями и имеет вид:

$$\sigma(\rho, \omega, T) \sim \frac{\rho}{T^{1/2}\omega^3}(1 - e^{-\omega/kT}), \tag{5.36}$$

где $T$ — температура плазменной компоненты вещества. Если поглощение полное, то имеет место состояние теплового равновесия между излучением и веществом плазмы, следовательно температура плазмы в процессе расширения меняется по тому же закону, что и температура излучения $T \sim R^{-1}$ (см. формулу (E.159)). С учетом космологического покраснения фотонов $\omega \sim R^{-1}$ (формула (E.157)) имеем постоянный экспоненциальный фактор в (5.36) и, следовательно, $\sigma \sim \rho R^{7/2}$. С учетом сохранения массы (ф-ла (E.158)), последнее соотношение принимает вид:

$$\sigma \sim R^{1/2}. \tag{5.37}$$

Критерий абсолютного поглощения (3.8) будет выполняться, если $\rho R^{1/2} \gtrsim t$. Снова используя ф-лу (E.158), приходим к выводу: *только в моделях с масштабным фактором, растущим не быстрее, чем* $R \sim t^{2/5}$, *имеется полное поглощение излучения.* В цитируемой работе Девис анализирует осциллирующие космологические модели и ряд экзотических моделей (например, с творением материи и нерелятивистскую модель Дирака, основанную на совпадении больших чисел). Его анализ обнаруживает необходимость учета специфических особенностей взаимодействия излучения с веществом, сильно зависящих от модели. Так, для осциллирующих фридмановских моделей определяющим является процесс образования электрон-позитронных пар. При этом стандартные характеристики этого процесса (соответствующее сечение) приходится экстраполировать в область космологической сингулярности, где, строго говоря, помимо квантово-электродинамического рассмотрения, необходимо учитывать эффекты квантовой гравитации и кривизну. По всей видимости, такая упрощенная экстраполяция недопустима и вопрос о причинности в замкнутых моделях остается открытым[7].

Следует заметить, что в свете последних результатов анализа космологических наблюдений, гипотеза о существовании темной материи и темной энергии [23] может полностью или частично изменить сложившуюся в 70-х годах причинную классификацию космологических моделей. Более того, требование причинности (расширенное и на другие взаимодействия) могло бы помочь в исследовании природы

[7] Упрощенный анализ Девиса по формуле (5.35) и Роя [22] приводит к выводу об абсолютном поглощении как в начальной, так и в конечной сингулярной точке замкнутой модели и, как следствие, к выводу об отсутствии причинности в таких моделях.

и конкретных свойств скрытой массы и ограничить число кандидатов на ее роль.

## 6. Неполное поглощение

Независимо от конкретной природы электродинамической стрелы времени (статистической или космологической), электродинамика Фоккера-Тетроде, в отличие от стандартной полевой, открывает широкие возможности для исследования всевозможных эффектов, связанных с неполным поглощением излучения. Поскольку абсолютное поглощение обеспечивает эффективно запаздывающий характер взаимодействия и правильный закон для силы радиационного трения, следует ожидать, что неполное поглощение приведет к различного рода эффектам, связанным с проявлением опережающих взаимодействий зарядов. Истолкование этих эффектов будет выглядеть по-разному на полевом языке и языке теории действия на расстоянии. "Мостиком" для перехода от одного истолкования к другому является тождество (3.30), выражающее действие окружающих частиц на выделенную $i$-ую частицу, которое мы перепишем в виде:

$$\sum_{j\neq i}\frac{1}{2}(\mathfrak{F}_-^{(j)}+\mathfrak{F}_+^{(j)})=\sum_{j\neq i}\mathfrak{F}_-^{(j)}+\frac{1}{2}(\mathfrak{F}_-^{(i)}-\mathfrak{F}_+^{(i)})+\mathfrak{F}_\infty, \tag{6.38}$$

где

$$\mathfrak{F}_\infty=\sum_j\frac{1}{2}(\mathfrak{F}_+^{(j)}-\mathfrak{F}_-^{(j)}). \tag{6.39}$$

Левая часть тождества (6.38) выражает симметричное во времени действие окружающих частиц в теории Фоккера-Тетроде, правая — то же действие тех же частиц на привычном причинном полевом языке. При этом первое слагаемое в правой части описывает запаздывающие поля окружающих частиц, второе слагаемое — стандартную силу радиационного трения, третье — поле обусловленное неполным поглощением. Последнее, как уже обсуждалось ранее, представляет собой решение уравнений Максвелла без источников. Оно будет выглядеть как последовательно приходящая из бесконечности (падающая на систему) волна и расходящаяся (исходящая от системы) волна. В случае полного поглощения $\mathfrak{F}_\infty = 0$, следовательно именно это поле и будет, в конечном счете, отвечать за все возможные опережающие эффекты.

В качестве первого простейшего примера можно рассмотреть одну заряженную частицу в пространстве свободном от зарядов, (но, возможно, содержащем источники других сил неэлектромагнитной природы, способных действовать на рассматриваемую частицу). Согласно электродинамики Фоккера-Тетроде, частица в пустом пространстве не излучает, поскольку отсутствует действие взаимодействия. Другими словами, левая часть (6.38) равна нулю, т.к. как нет частиц отличных от $i$-ой. На языке запаздывающих взаимодействий теории поля объяснение выглядит несколько более громоздко. Первое слагаемое в правой части (6.38) равно нулю, поскольку нет других частиц. Второе слагаемое отлично от нуля и представляет собой обычную силу радиационного трения. Сумма в третьем слагаемом сводится к единственному члену, противоположному силе радиационного трения. Другими словами, падающая и исходящая волна поля $\mathfrak{F}_\infty$, обусловленная полным отсутствием поглотителя, приходит в точности в нужный момент и в нужной фазе, чтобы полностью уничтожить силу радиационного трения. Мы имеем два эквивалентных объяснения отсутствия потерь на излучение заряда в пространстве свободном от других зарядов.

В качестве следующего примера рассмотрим пару заряженных частиц в пустом пространстве (релятивистская задача двух тел). В этом случае в левой части (6.38) мы получаем единственное слагаемое $(\mathfrak{F}_-^{(2)} + \mathfrak{F}_+^{(2)})/2$, описывающее симметричное действие 2-ой частицы на 1-ую. Правая часть (6.38) может быть приведена к виду:

$$\mathfrak{F}_-^{(2)} + \frac{1}{2}(\mathfrak{F}_+^{(2)} - \mathfrak{F}_-^{(2)})$$

— запаздывающего действия 2-ой частицы и "силы радиационного трения".

В отличие от причинной электродинамики с абсолютным поглотителем, эта сила имеет совсем другой вид: она совсем не зависит от характеристик движения частицы 1 и целиком определяется характеристиками движения частицы 2. К задаче двух тел мы еще вернемся в разделе 7.

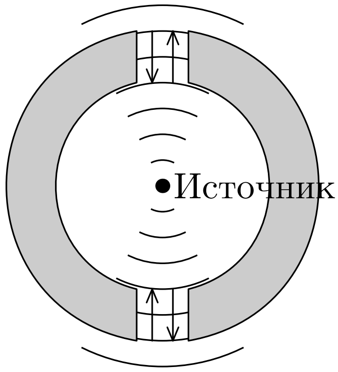



Рис. 6.1. Система с неполным поглощением.

В качестве следующего примера системы с неполным поглощением рассмотрим сферическую полость из абсолютного поглотителя, в которой сделано два небольших отверстия (будем называть их окнами), расположенных друг на против друга (см. рис. 6.1).

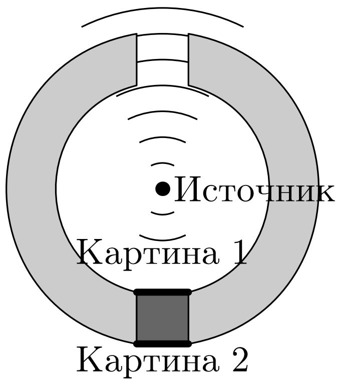



Рис. 6.2. Еще один пример системы с неполным поглощением. В первой интерпретации опережающие эффекты проявляются на внутренней стороне заглушки, во второй интерпретации — на внешней

В центре полости поместим источник, который в некоторый момент $t_0$ ускоряется сторонними силами. Поле $\mathfrak{F}_\infty$ теперь отсутствует (поглощается) только в тех направлениях, которые перекрыты поглотителем. Через окна волна, описывающая поле $\mathfrak{F}_\infty$ сначала входит, коллапсирует на источнике в точности в момент его ускорения (опережающая часть $\mathfrak{F}_\infty$), затем расходится и выходит за пределы полости через окна (запаздывающая часть $\mathfrak{F}_\infty$). Эта волна частично компенсирует силу радиационного трения, пропорционально телесному углу, стягиваемому окнами. При непрерывном увеличении размеров окон от нулевого до максимального — двух полусфер (т.е. полного отсутствия поглотителя) — мы будем наблюдать плавный переход от ситуации с полными поглощением и нормальной силой радиационного трения к ситуации первого примера, в котором излучение отсутствовало.

Во всех перечисленных примерах наличие поля $\mathfrak{F}_\infty$ не приводило к каким-либо обнаружимым опережающим эффектам. В первом и втором примерах вообще не было других заряженных частиц (приборов), с помощью которых можно было бы обнаружить опережающее взаимодействие, в последнем поле $\mathfrak{F}_\infty$ было ограничено областью пространства, в которой также отсутствовали какие-бы то ни было заряды.

Рассмотрим теперь четвертую ситуацию, в которой опережающие эффекты проявляются на частицах среды. Снова рассмотрим сферическую абсолютно поглощающую полость с источником в центре и одним окном (см. рис. 6.2). Часть поглотителя, расположенную напротив окна симметрично центру будем называть "заглушкой". Нарушение причинности и опережающие эффекты электродинамики Фоккера-Тетроде будут наблюдаться в направлении "окно-заглушка". Если бы область окна была заполнена поглощающим веществом, его опережающее воздействие скомпенсировало бы опережающее воздействие источника в направлении заглушки. Из-за отсутствия поглощающего вещества в окне, опережающее излучение источника в направлении заглушки остается нескомпенсированным.

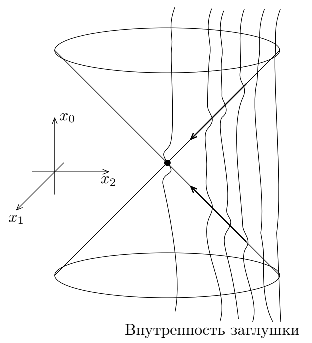
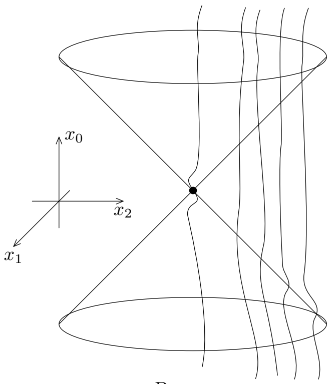



Рис. 6.3. Опережающее возмущение внутренних частиц заглушки.

Предположим, что в момент времени до начала ускорения источника, частицы внутренней стороны заглушки испытали возмущение такое, что их соответствующее запаздывающее поле приходит к источнику в точности в момент его ускорения (см. рис. 6.3). Предположим, что это поле целиком определяется характеристиками движения источника и, складываясь с собственным симметричным полем источника, полностью уничтожает его запаздывающую часть в направлении окна и восстанавливают его полное опережающее поле в направлении заглушки. Эта полная опережающая волна имеет характеристики как раз необходимые для обеспечения начального возмущения частиц внутренней поверхности поглотителя. В точке нахождения источника частицы внутренней поверхности поглотителя слегка понижают значение силы радиационного трения. Кроме возмущения в прошлом, частицы заглушки испытывают возмущение от источника в будущем посредством действия половины его запаздывающего поля. Стандартный механизм переизлучения приводит в процессе интерференции опережающего взаимодействия этих частиц с полем источника в направлении окна к восстановлению полного запаздывающего поля источника в направлении заглушки и компенсации опережающего поля источника в направлении окна. Таким образом, рассматриваемое самосогласованное (а следовательно, в принципе, возможное) решение проблемы движения источника и частиц поглотителя описывает систему с неполным поглощением, снаружи которой отсутствует как опережающее, так и запаздывающее излучение. Это означает, что $\mathfrak{F}_\infty = 0$ снаружи системы, а следовательно (как решение уравнений Максвелла в пустоте) и везде. Мы видим, что в рассмотренной ситуации система "имитирует" полное поглощение и частицы системы ведут себя практически так же, как и в случае полного поглощения за исключением небольшого понижения силы радиационного трения, действующей на источник. В этой картине остается один не совсем ясный вопрос: каким образом возникло первоначальное возмущение частиц внутренней стороны заглушки? По существу, это возмущение — и есть наблюдаемый опережающий эффект. Он будет наблюдаться как своеобразная "фокусировка" запаздывающих действий частиц внутренней стенки поглотителя. Хаотическое движение этих частиц в нужный момент времени вызывает коррелированное движение частиц внутренней стенки заглушки, которое, в свою очередь, вызывает сходящуюся на источнике запаздывающую волну нужной амплитуды и нужной фазы. С точки зрения термодинамики такое решение, очевидно, чрезвычайно маловероятно.

Оказывается, что опережающие эффекты в этой же самой ситуации могут проявиться и по-другому. Рассмотрим ситуацию, в которой любая пробная частица в полости обнаруживает действие лишь наблюдаемого на опыте запаздывающего поля источника. Стандартный механизм переизлучения возмущающего импульса источника стенками поглотителя приводит к уничтожению опережающего действия источника в направлении окна, так что пробная частица, расположенная снаружи поглотителя вблизи окна не обнаружит никакого опережающего действия источника. Предположим, что она обнаруживает полное запаздывающее действие и попытаемся найти самосогласованное объяснение этого предположения. При этом сразу возникает вопрос: каким образом это полное запаздывающее действие образуется из половины запаздывающего действия самого источника? Вопрос о том, каким образом половина опережающего действия источника в направлении заглушки уничтожается, тесно связан с первым. Напомним, что в окне поглотителя нет и стандартный механизм переизлучения и интерференции в этом направлении не срабатывает. Отметим также, что запаздывающие поля внутренней части заглушки также не пригодны для объяснения, поскольку мы предположили причинный характер взаимодействий внутри полости, а запаздывающее действие внутренней поверхности заглушки должно начаться раньше момента ускорения источника. Роль необходимого компенсатора могут выполнять в этой ситуации частицы внешней части заглушки, лежащие на конусе прошлого источника и, следовательно, возмущенные ранее момента ускорения источника (см. рис. 6.4).



Внешность заглушки

Рис. 6.4. Опережающее возмущение внешней стороны заглушки. Энергия источника распространяется в прошлое.

Именно, половина запаздывающего поля этих частиц компенсирует половину опережающего поля источника в стенке заглушки и внутри полости. Половина опережающего действия этих частиц складываясь с половиной опережающего действия источника снаружи полости дает сходящуюся на источник полную опережающую волну, которая и падает на внешние частицы заглушки. Эта волна целиком определяет силу, действующую на эти частицы и их ускорение. Энергию, которую получат эти частицы от волны приходящей из бесконечности, позже, в момент ускорения, излучит сам источник.

Мы описали две самосогласованные картины опережающих эффектов в одной и той же ситуации. Можно придумать множество (в принципе бесконечное) и других самосогласованных ситуаций, в которых эффекты опережения будут проявляться другими способами. Без дополнительных сведений о системе (конкретизации начальных условий) невозможно выбрать какую-либо одну из них. Другими словами, *в системе с неполным поглощением опережающие эффекты* *обязательно присутствуют, но конкретные частицы, на которых такие эффекты будут проявляться, определятся только после задания начальных условий системы.* Ввиду специфического характера начальных условий для систем с запаздыванием или опережением (см. след. раздел), на практике это означает "спонтанный характер" этих эффектов в изучаемой системе, что приводит к значительным трудностям в их экспериментальном обнаружении.

Эксперименты по измерению возможных опережающих эффектов электромагнитного излучения были предложены и некоторые из них даже проведены (они имели отрицательный результат). В эксперименте Партриджа [24] источник излучал сначала в открытое пространство (рис. 6.5), а затем в пространство, заполненное лабораторным поглотителем (рис. 6.6). При этом измерялась мощность потерь на излучение, а результаты измерений сравнивались. Предполагалось, что если бы вселенная в прошлом и будущем была неполным поглотителем, то разница между мощностью излучения в двух исследуемых ситуациях свидетельствовала бы о наличии опережающих эффектов. Однако, как показал последующий анализ Девиса [25], даже при отсутствии полного поглощения во вселенной, опережающая компонента излучения могла быть поглощена Землей или тыльной стороной излучателя. Опережающие взаимодействия справа (рис.6.5) (из открытого космоса) могли быть скомпенсированы абсолютным поглощением ближней стороной Земли, а слева (со стороны Земли) — абсолютным поглощением левой (дальней к эксперименту) частью Земли.

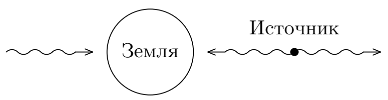



Рис. 6.5. К эксперименту Партриджа.

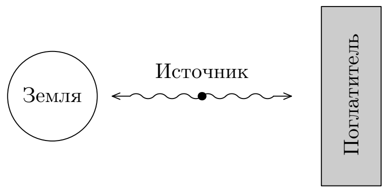



Рис. 6.6. К эксперименту Партриджа.

Таким образом, эксперимент типа Партриджа мог бы дать положительный эффект лишь вдали от Земли и других крупных поглощающих тел. Заметим, что приведенная интерпретация эксперимента соответствует второму варианту истолкования неполного поглощения Уилером и Фейнманом.

Другая схема эксперимента, опирающаяся на первый вариант, была предложена годом позже Героном и Пеггом [26]. В ней опережающее излучение периодически поглощалось с помощью системы переключателей, а запаздывающее испускалось свободно. При этом, ожидалось, что из-за коррелированного опережающего действия поглотителя, источник станет терять энергию на излучение значительно медленнее, поскольку уходящая вместе с запаздывающей частью энергия, частично или полностью компенсируется приходящей с опережающей частью энергией от возмущенного в прошлом поглотителя (см. рис. 6.7). Как указал Девис, такое поведение поглотителя не согласуется со статистической механикой. Более вероятная картина излучения показана на рис. 6.8, где опережающая компонента излучения практически полностью поглощается наружным слоем поглотителя, а источник излучает запаздывающие сигналы нормальной мощности.

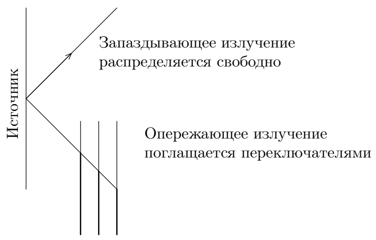



Рис. 6.7. Предполагаемая интерпретация эксперимента Герона и Пегга.

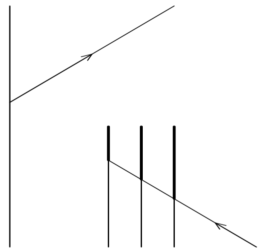


Рис. 6.8. Статистически более вероятная интерпретация эксперимента Герона и Пегга.

Интересные эксперименты по исследованию квантовой нелокальности и связанных с ней опережающих корреляций проводились в последнее десятилетие с помощью электродных и фотокатодных детекторов на базе института геомагнитных исследований РАН и центра прикладной физики МГТУ им. Баумана ([27] и ссылки там). Опережающие корреляции сигналов детекторов и солнечной активности достоверно зафиксированы в серии долговременных экспериментов (время опережения, при котором корреляции сигналов детекторов и активности Солнца максимальны, оказывается равным примерно 130 суток). При этом показано, что локальные причинные цепи, связанные с промежуточными корреляциями температуры и геомагнитной активности исключены. Вопрос о природе опережения (квантовая нелокальность, неполное поглощение или другие варианты) остается, по всей видимости, открытым.

Остановимся, наконец, еще на одном эффекте присутствия опережающих взаимодействий, связанном со своеобразной инерционностью заряженных частиц. Речь пойдет о, так называемом, эффекте *преускорения*, возможность которого впервые описал Дирак [13]. Этот эффект может наблюдаться в полностью поглощающей среде, благодаря особой природе радиационной силы трения. Следуя [28], запишем нерелятивистское уравнение движения частицы массы $m$ с зарядом $e$ в виде[8]:

$$\dot{v} - \tau\ddot{v} = \frac{F}{m}, \tag{6.40}$$

где $\tau = 2e^2/3mc^3$ — комбинация параметров, имеющая размерность времени. В уравнении (6.40) второе слагаемое слева описывает действие силы радиационного трения, $F$ — внешняя сила. Уравнение (6.40) напоминает уравнение движения в среде с диссипацией:

$$\dot{v} - \frac{v}{\tau_0} = \frac{F}{m},$$

в котором $\tau_0$ играет роль времени релаксации. Пределу отсутствия потерь на трение $\tau_0 \to \infty$ в обычной ситуации, в динамике заряженной частицы соответствует обратный предел $\tau \to 0$ или $m \to \infty$ (тяжелые заряженные частицы медленнее изменяют свои скорость и ускорение, следовательно потери на излучение у них меньше). В отсутствие внешней силы интеграл (6.40) имеет вид:

$$\dot{v} = \dot{v}(0)e^{t/\tau} \tag{6.41}$$

и при $v(0) \neq 0$ он описывает физически бессмысленную ситуацию с самоускоряющимся зарядом. Такая ситуация возникает именно благодаря тому, что сила радиационного трения зависит от вторых производных скорости. Чтобы увидеть это, решим уравнение (6.40) в общем виде с помощью метода вариации постоянных. Решение имеет вид:

$$\dot{v} = e^{t/\tau}\left(\dot{v}(0) - \frac{1}{\tau m}\int\limits_0^t e^{-t'/\tau}F(t')\,dt'\right), \tag{6.42}$$

[8]Для простоты рассматривается одномерный случай.

где интеграл в скобках описывает частное решение неоднородного уравнения. В отличие от обычных задач механики, где для однозначной фиксации решения необходимо задавать лишь начальную координату и начальную скорость, в рассматриваемом нами случае необходимо задать еще и начальное ускорение. Если задавать его произвольно, то при $t \to \infty$, как и прежде, будем иметь самоускорение заряда. Дирак обратил внимание, что если задать начальное ускорение следующим выражением:

$$\dot{v}(0) = \frac{1}{\tau m} \int_0^\infty e^{-t'/\tau} F(t')\, dt', \tag{6.43}$$

то ускорение $\dot{v}(t)$ будет иметь конечную величину при $t \to \infty$. Такой выбор начального ускорения, в частности, означает, что ускорение при $t = 0$ зависит от значения силы на всей будущей истории заряда. В качестве простого, но характерного примера Дирак рассмотрел $\delta-$образный импульс силы: $F = P\delta(t)$, где $P$ — конечный переданный импульс. Подставляя это выражение в (6.43) и (6.42) и вычисляя интегралы с $\delta$-функцией[9], приходим к следующему интересному решению с преускорением:

$$\dot{v}(t) = \begin{cases} \dfrac{P}{\tau m} e^{t/\tau}, & t < 0; \\ \\ 0, & t > 0. \end{cases} \tag{6.44}$$

Оно описывает частицу, испытывающую ускорение до начала действия импульса силы. Зависимость скорости от времени для рассматриваемой ситуации и для ситуации, в которой $\delta$-образный импульс действует в отсутствие силы радиационного трения показаны на рис. 6.9-6.10.

[9] Для правильного вычисления интегралов необходимо использовать правило интегрирования с $\delta$-функцией в том случае, когда ее особенность сосредоточена на границе промежутка интегрирования (свойство 4 $\delta$-функции в Приложении В).

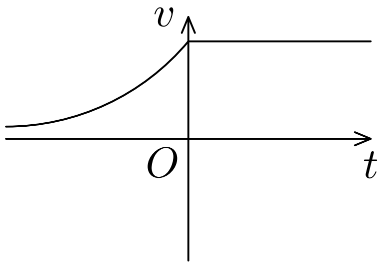



Рис. 6.9. Зависимость скорости от времени частицы, на которую действует $\delta$-образный импульс и сила радиационного трения, содержащая третьи производные.

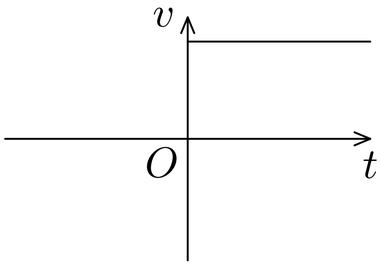



Рис. 6.10. Зависимость скорости от времени частицы, на которую действует $\delta$-образный импульс в отсутствие силы радиационного трения.

Следует отметить, что характерное время антипричинного поведения частицы типа электрона оказывается порядка $10^{-23}$с, что означает практическую необнаружимость такого эффекта в обычных условиях. Однако, преускорение имеет принципиальное значение: *оно иллюстрирует важное следствие электродинамики Фоккера-Тетроде: причинность имеет место лишь на временных промежутках, существенно больших $\tau \sim 10^{-23}$с.* Можно взглянуть на положение вещей и по-иному: *фундаментальные константы природы (заряд и масса электрона, скорость света) таковы, что причинность сохраняется с большой точностью.*

Дирак, писавший свою работу в 1938г. до появления работы Уилера и Фейнмана, для объяснения преускорения высказал гипотезу о том, что это явление может быть связано с возможностью сверхсветовой скорости распространения сигналов внутри электрона. Он писал, что "...внутренняя область электрона выступает не только как область нарушения уравнений электромагнитной теории, но и некоторых фундаментальных свойств пространства времени". Фейнман и Уилер отметили в цитированой выше работе, что, если бы это было действительно так, то эффект только усилился бы в плотной среде, состоящей из заряженных связанных частиц. Они произвели расчет преускорения в такой среде и обнаружили, что преускорение присутствует в этом случае в виде осцилляций, предваряющих приход импульса, но характерная продолжительность этих опережающих осцилляций оказывается в $\sim \sqrt{N}$ раз ($N$ — концентрация частиц среды) меньше, чем для случая одиночной частицы. Уилер и Фейнман приходят к следующему заключению:

...Следовательно, до тех пор пока силой радиационного трения можно пренебречь, в системе с полным поглощением мы имеем возможность различать прошлое и будущее; но четкость этого различения ограничена временами порядка $e^2/mc^3$ или большими. Явления, происходящие за времена меньшие этого значения, требуют от нас признания полной взаимозависимости прошлого и будущего в природе, взаимозависимости, происходящей из того факта, что элементарные законы взаимодействия между частицами симметричны относительно опережающих и запаздывающих полей.

## 7. Математические проблемы

В работе [21] П.Девис обозначил пять преимуществ дальнодействующей формулировки электродинамики по сравнению с традиционной запаздывающей формулировкой:

1. Отсутствие проблемы бесконечной собственной электромагнитной энергии заряженных частиц;

2. Возможность устранения расходимостей без необходимости разработки динамической теории поля (за счет надлежащей модификации фотонного пропагатора);

3. Экономия основных постулатов. В частности, в поглощающей вселенной запаздывающие взаимодействия появляются автоматически, в то время как в традиционной опережающие решения приходится устранять искусственно ("своими руками");

4. Новая формулировка дает возможность установить связи между термодинамической, космологической и электромагнитной стрелами времени;

5. В новой теории появляется естественная возможность развития квантовой теории измерений посредством включения квантовых микросистем в космологию и необратимую термодинамику.

Второй и пятый пункт характеризуют квантовую версию дальнодействующей электродинамики, которой мы не будем касаться в настоящем обзоре. Несмотря на отмеченные преимущества, дальнодействующая формулировка электродинамики не была принята широкими кругами научной общественности. Причины такого неприятия мы обсудим более подробно в Заключении.

В этом разделе мы кратко остановимся на проблемах дальнодействующей формулировки электродинамики технического характера, которые не возникают в явном виде в полевой формулировке. Рассмотрим самосогласованную задачу об определении закона движения пары зарядов в теории Фоккера-Тетроде. Принцип наименьшего действия во временной параметризации принимает вид:

$$\mathcal{A}[x_{(1)}(t), x_{(2)}(t)] = -m_{(1)}c^2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\dot{x}^2_{(1)}/c^2}\, dt - \tag{7.45}$$

$$m_{(2)}c^2 \int\limits_{T_1}^{T_2} \sqrt{1-\dot{x}^2_{(2)}/c^2}\, dt - \frac{q_{(1)}q_{(2)}}{c} \int\limits_{T_1}^{T_2}\int\limits_{T_1}^{T_2} \delta(s^2_{(1)(2)})(\mathfrak{U}_{(1)} \cdot \mathfrak{U}_{(2)})\, dt_{(1)}\, dt_{(2)},$$

где $m_{(1)}$, $m_{(2)}$ — массы покоя первой и второй частицы, $q_{(1)}$, $q_{(2)}$ — их заряды, $x_{(1)}(t), x_{(2)}(t)$ — искомые законы движения, $\mathfrak{U}_{(i)} = (c, \vec{v}_{(i)})$ $i = 1, 2$ — формальные "4-векторы" скорости, получающиеся дифференцированием 4-радиус векторов частиц по координатному времени[10]. Раскрывая выражение $\delta(s^2_{(1)(2)})$ и выполняя в действии взаимодействия интегрирование по времени $t_{(2)}$, приходим к нелокальному во времени действию следующего вида:

$$\mathcal{A}[x_{(1)}(t), x_{(2)}(t)] = -m_{(1)}c^2 \int\limits_{T_1}^{T_2} \sqrt{1-\dot{x}^2_{(1)}/c^2}\, dt - \tag{7.46}$$

$$m_{(2)}c^2 \int\limits_{T_1}^{T_2} \sqrt{1-\dot{x}^2_{(2)}/c^2}\, dt - \frac{q_{(1)}q_{(2)}}{2c^2} \int\limits_{T_1}^{T_2} \left( \frac{\mathfrak{U}_{(1)} \cdot \mathfrak{U}^{+}_{(2)}}{x^{+}_{(1)(2)}} + \frac{\mathfrak{U}_{(1)} \cdot \mathfrak{U}^{-}_{(2)}}{x^{-}_{(1)(2)}} \right) dt$$

где, символы $\pm$, у величин, характеризующих вторую частицу, означают что они рассматриваются в момент времени:

$$t_2 = t \pm \frac{x^{\pm}_{(1)(2)}}{c}. \tag{7.47}$$

[10] Строго говоря, эти величины не образуют настоящих 4-векторов.

Здесь

$$x^{\pm}_{(1)(2)} = \sqrt{|\vec{x}_{(1)} - \vec{x}^{\pm}_{(2)}|^2} \tag{7.48}$$

— расстояние между частицами вдоль конуса будущего и конуса прошлого частицы 1. Уже на этом этапе мы сталкиваемся сразу с двумя серьезными проблемами: во-первых, действие нелокально во времени, во-вторых эта нелокальность зависит от закона движения, который определяется нелокальным действием, в котором нелокальность зависит от закона движения и т.д. Ничего подобного нет в стандартной полевой формулировке: действие (D.138) всегда локально и приводит к системе дифференциальных уравнений второго порядка. В самосогласованной задаче движения пары частиц в стандартной электродинамике часть этих уравнений (для частиц) — обыкновенные, часть (для поля) — уравнения в частных производных. Для вывода уравнений движения частиц в формулировке Фоккера-Тетроде, проварьируем действие (7.45) по закону движения $x_{(1)}(t)$ первой частицы. При этом необходимо учесть, что величины, зависящие от закона движения второй частицы в действии взаимодействия также подлежат варьированию, поскольку они зависят от $x_{(1)}(t)$ через соотношение (7.47). Например, вариация $x^{\pm}_{(1)(2)}$ с учетом (7.47) и (7.48) принимает вид:

$$\delta x^{\pm}_{12} = \frac{\vec{x}^{\pm}_{12} \cdot \delta\vec{x}_1}{x^{\pm}_{12} \pm (\vec{x}_1 - \vec{x}^{\pm}_2) \cdot \vec{v}^{\pm}_2/c}. \tag{7.49}$$

Используя (7.49), приходим к следующему уравнению движения для частицы 1:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}\right) = \frac{q_{(1)}q_{(2)}}{2m_{(1)}}\left[\sum_{\sigma=+,-}\right. \tag{7.50}$$

$$\left.\frac{1 - \vec{v}_{(1)}\cdot\vec{v}^{\sigma}_{(2)}/c^2 - \epsilon_\sigma(\vec{v}_{(1)}\cdot\dot{\vec{v}}^{\sigma}_{(2)})x^{\sigma}_{(1)(2)}/c^3}{1+\epsilon_\sigma(\vec{n}^{\sigma}_{(1)(2)}\cdot\vec{v}^{\sigma}_{(2)})/c}\frac{\vec{x}^{\sigma}_{(1)(2)}}{(x^{\sigma}_{(1)(2)})^3} - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}^{\sigma}_{(2)}}{x^{\sigma}_{(1)(2)}}\right)\right]$$

где

$$\epsilon_\sigma = \begin{cases} +1, & \sigma = +1 \\ -1, & \sigma = -1. \end{cases}$$

Уравнение для второй частицы получается заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в выражении (7.50). В нерелятивистском пределе $c \to \infty$ исчезают релятивистские эффекты и запаздывание с опережением, а уравнение (7.50) описывает нерелятивистскую задачу двух тел в кулоновом поле, решения которой хорошо известны. Уравнение (7.50) в общем виде изучено мало, а его приближенные решения известны лишь для небольшого числа частных случаев. Главная проблема заключается в том, что в отличие от дифференциальных уравнений обычного типа, уравнение (7.50) связывает неизвестный закон и его производные не в один и тот же момент времени, а в разные моменты. При этом сдвиг во времени зависит от неизвестного закона движения. Уравнения такого рода называются в математической литературе *дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом* [29]. Наличие отклонения (запаздывания или опережения) приводит к необходимости пересмотра начальной задачи Коши. Напомним, что решения уравнений движения обычных механических систем содержат произвольные константы интегрирования, которые конкретизируются посредством задания начальных значений координат и скоростей. В случае уравнений с отклоняющимся аргументом, задание начальных значений координат и скоростей будет недостаточным. Это обстоятельство иллюстрируется рисунком 7.1. Для простоты на нем показано лишь запаздывающее взаимодействие. При заданных значениях координат и скоростей частиц в момент $t = 0$, отрезки мировых линий $AA'$ и $BB'$ остаются неопределенными, поскольку их непосредственно определяет не настоящее и будущее, а прошлое частиц. Для корректной постановки задачи в качестве начального условия необходимо каким-либо образом задавать целые отрезки мировых линий. При произвольном задании этих отрезков, может оказаться, что прошлые истории частиц, описываемые отрезками $AA''$ и $BB''$, которые могли бы определять движение на $AA'$ и $BB'$ не удовлетворяют исходным уравнениям движения (7.50). В этом случае, мы должны допустить существование каких-то сторонних сил, которые обеспечивают необходи-

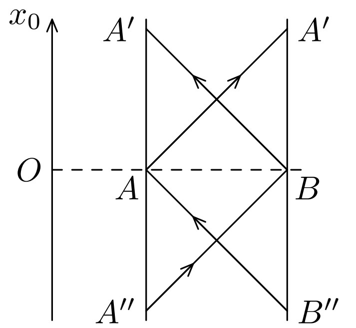


Рис. 7.1. К задаче Коши в системах с нелокальным взаимодействием.

мый характер движения на $AA''$ и $BB''$, чтобы $AA'$ и $BB'$ задавали нужные нам начальные условия. В такой постановке задача становится несамосогласованной. Самосогласованная постановка задачи получится, если наряду с начальными данными при $t = 0$ дополнительно потребовать, чтобы на всем временном интервале закон движения удовлетворял одним и тем же уравнениям (7.50). В такой постановке задача двух тел исследовалась Драйвером [30, 31].

Характер решений уравнений движения с отклонением (даже в случае приближенных решений) значительно отличается от решения нерелятивистской задачи двух тел. В работе [32] изучался вопрос о существовании круговых орбит в динамике запаздывающего типа. Оказывается, что круговые орбиты в такой динамике могут образовывать лишь дискретный набор, при этом частицы могут не лежать на одном диаметре круговой орбиты. В симметричной электродинамике Фоккера-Тетроде появляется еще одна особенность: будущее влияет на прошлое в той же степени, в которой прошлое влияет на будущее. Рисунок 7.2 иллюстрирует это обстоятельство. Частица 1 посредством опережающего сигнала влияет на прошлое частицы 2, а частица 2 также посредством опережающего сигнала влияет на прошлое самой частицы 1. Аналогичные рассуждения справедливы и для будущих историй. В целом это означает, что *задача об эволюции взаимодействующих частиц в симметричной электродинамике Фоккера-Тетроде должна изначально решаться в целом* [31]. При этом мы с необходимостью приходим к вопросу о начально-конечных условиях в прошлом и в будущем. В традиционной постановке эти условия не вытекают из уравнений движения и должны задаваться "руками" для выделения однозначного решения. В динамике с отклонением в принципе возможна ситуация, когда *начальные условия однозначно определяются из условия самосогласованности решения на протяжении всего времени эволюции системы взаимодействующих частиц.* Это обстоятельство, любопытное само по себе, могло бы послужить в качестве дополнительного критерия отбора реалистичных космологи-

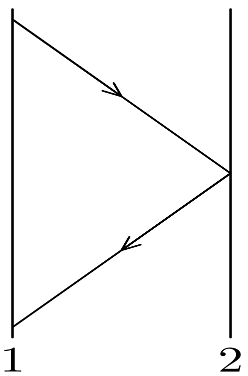



Рис. 7.2. Прошлые и будущие истории частиц в симметричной электродинамике "зацеплены" друг с другом.

ческих моделей.

Рассмотрим, наконец, вопрос о том, почему в полевой формулировке электродинамики мы не сталкиваемся с проблемой решения уравнений с отклоняющимся аргументом, а имеем дело с обычными дифференциальными уравнениями. На самом деле, введение концепции поля в математическом отношении и можно рассматривать как способ перейти от дифференциальной системы с отклоняющимся аргументом к системе локальных дифференциальных уравнений. Запаздывание или опережение переносится при этом на "механизм распространения" вспомогательной сущности — электромагнитного поля, которое с одной стороны приобретает свои собственные (фиктивные с точки зрения дальнодействующей формулировки) немеханические степени свободы, с другой — позволяет наглядно объяснять и истолковывать электромагнитные явления по аналогии с механическими полями напряжений в физике сплошных сред. Разумеется, последовательная попытка решить релятивистскую задачу двух тел в рамках электродинамики Фарадея-Максвелла с необходимостью приведет к уравнениям с отклоняющимся аргументом. Действительно, вариация стандартного действия (D.138) по полям дает уравнения Максвелла с источниками, подлежащими определению из уравнения движения (D.144). Последние получаются варьированием того же действия по координатам частиц. При этом компоненты тензора напряженности электромагнитного поля должны определяться из уравнений Максвелла (D.131). Таким образом, мы имеем зацепленную систему уравнений, которую можно решать "методом последовательного исключения переменных." Выберем в качестве промежуточной переменной компоненты электромагнитного поля, т.е. выразим поле из уравнений Максвелла через источники. Решение (векторный потенциал) будет выражаться через функцию Грина $\mathcal{E}_{W-}$ по формуле:

$$\mathfrak{A}(x) = \int \mathcal{E}_{W-}(x - x')\mathfrak{J}(x')\, d^4x. \tag{7.51}$$

Интегрирование по времени в этом выражение приведет к появлению запаздывающего аргумента, так что:

$$\mathfrak{A}(x) = \int \frac{\mathfrak{J}^-(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\, dV', \tag{7.52}$$

где $\mathfrak{J}^- \equiv \mathfrak{J}|_{t=t'-|\vec{x}-\vec{x}'|/c}$. Подставляя выражение (7.52) в правую часть уравнений движения (D.144), мы и получим уравнения движения с запаздыванием. Отметим еще раз, что общее точное решение релятивистской задачи двух тел до сих пор неизвестно.

# 8. Заключение: еще раз о научной философии и реальности

Подведем некоторые итоги.

1. Дальнодействующая формулировка электродинамики в форме действия Фоккера-Тетроде при наличии абсолютного поглотителя полностью эквивалентна в своих выводах и экспериментальных следствиях традиционной полевой формулировке Фарадея-Максвелла.

2. С точки зрения дальнодействующей формулировки причинная полевая электродинамика является "эффективной" или даже приближенной теорией, а сила радиационного трения имеет смысл опережающей реакции поглотителя.

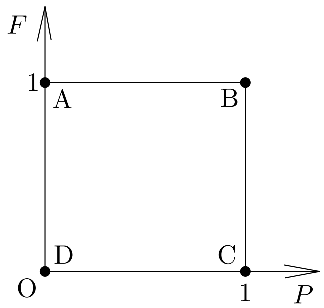



Рис. 8.1. Семейство эффективных теорий, описываемых электродинамикой Фоккера-Тетроде. A — стандартная электродинамика Максвелла, B — электродинамика в пульсирующей вселенной Фридмана, C — антипричинная электродинамика, D — электродинамика "единственного заряда" во вселенной.

3. Дальнодействующая формулировка позволяет анализировать эффекты неполного поглощения и дает дополнительные критерии отбора реалистичных (причинных) космологических моделей.

4. Переход на язык теории поля математически подразумевает переход от дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом к локальным дифференциальным уравнениям.

Таким образом, можно сказать, что симметричная электродинамика Фоккера-Тетроде описывает семейство теорий, которые можно охарактеризовать точкой на единичном квадрате (см. рис. 8.1). По горизонтальной оси откладывается коэффициент $P$ поглощения поглотителя в прошлом, по вертикальной — коэффициент $F$ поглощения в будущем. Стандартная электродинамика Максвелла изображается одной точкой с координатами $(0; 1)$. Некоторые частные теории обсуждались выше в космологическом контексте или при анализе систем с неполным поглощением. Остальные случаи (внутренность квадрата) вместе с их экспериментальными следствиями остаются открытыми для исследований.

Несмотря на некоторые очевидные преимущества дальнодействующей формулировки электродинамики, имеется множество причин, по которым физика XX века двигалась в направлении развития теории поля. Отметим те из них, которые, на наш взгляд, являются основными.

1. **Психологические причины.** Высказывание Ньютона, цитированное во Введении, в целом выражает общепринятую точку зрения о соотношении концепции близкодействия и действия на расстоянии. Наш повседневный опыт и его традиционное истолкование учат нас тому, что причинная связь двух событий обязательно подразумевает физический механизм, действующий непрерывно в пространстве и во времени. Несмотря на то, что законы квантовой механики допускают нелокальные корреляции квантовых систем, а кванты электромагнитного поля — фотоны — не локализованы в пространстве и во времени, физика сохраняет и по сей день язык близкодействия, хотя и вынуждена наделить его новыми характеристиками, которых не было в первоначальной классической формулировке. В современном общефилософском плане концепция близкодействия отражает идею анализа природных явлений, как основного методологического принципа науки, в то время как концепция дальнодействия ближе к некоторым современным идеям философии *холизма*, которые, по всей видимости, еще не вошли в повседневный рабочий обиход физиков.

2. **Математические причины.** В предыдущем разделе мы убедились, что естественным математическим аппаратом дальнодействующей формулировки электродинамики являются дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, в то время как аппарат полевой электродинамики — локальные дифференциальные уравнения второго порядка. Ввиду того, что теория локальных уравнений непрерывно развивалась на протя-

жении более чем 200 лет, а теория нелокальных уравнений и по сегодняшний день находится в зачаточном состоянии, физики пользовались и продолжают пользоваться тем аппаратом, который наиболее разработан. Тем не менее, теория нелокальных дифференциальных уравнений, по все видимости, будет развиваться, поскольку, как мы видели в предыдущем разделе, даже простейшая самосогласованная проблема двух тел приводит к нелокальным уравнениям довольно общего типа, которые не удается решить методами стандартной теории локальных дифференциальных уравнений.

3. **Новые идеи в теории поля.** Калибровочная инвариантность электродинамики Максвелла полужила основой для формулировки *калибровочного принципа* — универсального способа описания фундаментальных взаимодействий. На основе калибровочного принципа удалось не только построить по единой схеме теорию гравитации (ОТО или ее обобщения) и теорию слабых и сильных взаимодействий, но и разработать схемы для объединения этих взаимодействий в одну "суперсилу". При этом, калибровочный принцип получил глубокое геометрическое обоснование в рамках математической теории т.н. $G$-расслоений. К примеру, полевая часть электродинамики Максвелла на современном геометрическом языке представляет собой чисто геометрическую теорию, которая формулируется в 5-мерном пространстве-времени. При этом 4 измерения описывают 4-мерный мир Минковского, а 5-е измерение является "внутренним", т.е. ненаблюдаемым, "свернутым" в колечко малых размеров. Именно с "движениями" вдоль этого колечка и ассоциируются стандартные калибровочные преобразования (формула (D.134) Приложения D.2) потенциалов. $G$-расслоения современных единых теорий устроены значительно сложнее. Их разработка привела к внедрению в теорию поля идей топологии. Изобилие материала и эстетическая привлекательность геометрического аспекта калибровочного принципа привлекли основные усилия физиков, исследующих взаимодействия и отодвинули принцип дальнодействия на второй план.

В дальнодействующей формулировке нет потенциалов поля, а следовательно вопрос о калибровочной инвариантности не возникает.

Как было показано в разделе 3.2, для финитной системы частиц эффективный векторный потенциал автоматически удовлетворяет калибровочному условию Лоренца, следовательно калибровочной инвариантности в такой системе попросту нет. Для инфинитной системы вопрос остается открытым. Возникает вопрос о том, что соответствует калибровочным преобразованиям полей на языке теории дальнодействия? В литературе по дальнодействию этот вопрос не освещался. По всей видимости, *калибровочным преобразованиям потенциала в теории поля соответствуют различные начально-граничные условия в дальнодействующей формулировке.* Несмотря на то, что данное утверждение следует воспринимать как гипотезу, связь калибровочных преобразований с граничными условиями можно проследить даже в рамках теории поля. Действительно, первое и третье слагаемое в действии (D.138) калибровочно инвариантны. Калибровочное преобразование потенциала: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} + \mathrm{Grad}\chi$ приведет к появлению в действии добавки:

$$\delta\mathcal{A} = -\frac{1}{c}\int\limits_{\mathcal{M}}(\mathrm{Grad}\chi\cdot\mathfrak{J})\,d^4x = -\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\mathcal{M}}\chi(\mathfrak{J}\cdot d^3\Sigma)+\frac{1}{c}\int\limits_{\mathcal{M}}\chi\mathrm{Div}\mathfrak{J}\,d^4x \quad (8.53)$$

где часть после знака равенства получена применением формулы интегрирования по частям и 4-мерной теоремы Гаусса (см. формулу (C.123) Приложения C). При этом $d^3\Sigma$ — 4-векторный элемент интегрирования по 3-мерной граничной гиперповерхности $\partial\mathcal{M}$, ограничивающей рассматриваемую систему частиц. Требование отсутствия появления объемных членов в (8.53) при калибровочном преобразовании, приводит к закону сохранения заряда:

$$\mathrm{Div}\mathfrak{J} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0,$$

в то время как второе слагаемое можно интерпретировать как вклад в граничные условия системы.

В настоящем обзоре мы вовсе не касались интересных вопросов о законах сохранения, квантовании, дальнодействующей формулировке других взаимодействий и ряда других. В контексте дальнодействия эти вопросы получают новое содержательное освещение, которое, в свою очередь, расширяет понимание полевого подхода и открывает перспективы для новых исследований. Сведения по упомянутым вопросам заинтересованный читатель найдет в монографии [17].

Обсудим теперь общефилософские выводы, к которым можно прийти, сравнивая два подхода к электродинамическим явлениям. Эти выводы почти с необходимостью следуют из попытки ответить на вопрос: "Так существует ли электромагнитное поле?" Подавляющее большинство читателей этого обзора, даже согласившись с возможностью альтернативного описания электромагнитных явлений, ответят на этот вопрос утвердительно. Чтобы лучше уяснить характер возникающих здесь проблем, организуем различные мнения по этому поводу в форму дискуссии трех воображаемых собеседников. Собеседник А будет адептом теории поля, собеседник В будет выражать позицию автора настоящего обзора, собеседник С — человек со стороны, желающий разобраться с необычным вопросом: "Существует ли электромагнитное поле?"

С: — Еще со школьных времен я привык думать, что электромагнитное поле — экспериментально доказанный факт. Нам говорили, что на языке электромагнитного поля можно объяснить все электромагнитные явления. Примерно то же самое, ну может быть с большим числом деталей, я слышал потом и в вузе. А на днях я вдруг узнаю, что концепция поля не обязательна для таких объяснений. Что же? Выходит, нас неправильно учили? Или это мнение ошибочно? Что вы думаете по этому поводу?

А: — Я думаю, что здесь какое-то недоразумение. Все электрические и электродинамические устройства проектируются и изготавливаются на основе представлений об электромагнитном поле и его свойствах. Напряженности электрических и магнитных полей можно измерить. Скорость распространения электромагнитных волн измерена с большой точностью. А уравнения Максвелла всегда "работают" так же надежно, как и многочисленные устройства, рассчитанные на их основе. На фоне такого огромного количества неопровержимых фактов, свидетельствующих в пользу полевой теории электромагнитизма, попытки объяснить их без понятия поля похожи на попытки дышать в безвоздушном пространстве. Я лично воспринимаю их либо как любопытный научный курьез, либо как абстрактную академическую теорию, не имеющую практического интереса.

В: — Я согласен с тем, что известное множество физических явлений можно объяснить на основе концепции поля, подчиняющегося известным уравнениям Максвелла. Я также согласен и с тем, что для подавляющего большинства этот язык привычен и нагляден. Но я не могу согласиться с утверждением, что удобство объяснения является достаточным критерием реальности той сущности, которую выражает используемое понятие. К примеру, деньги — не обладают большой самостоятельной ценностью, но они удобны как универсальный количественный эквивалент ценности. Нам удобно исчислять стоимость предприятия в денежном эквиваленте, хотя реальная ценность предприятия будет определяться затраченными материальными средствами и трудом.

А: — Это верно. Но я делаю заключение о реальности электромагнитного поля не на основании удобства его использования, а на основании фактов. Чтобы убедиться, что между двумя зарядами действует посредник в виде электромагнитного поля, достаточно поместить между ними детектор. Возмущение одной частицы сначала попадет в детектор, а лишь затем, возможно частично ослабленное, к другой частице. Детекторы можно установить достаточно плотно и тогда мы, практически, визуализируем электромагнитную волну.

В: — А вот здесь стоит разобраться. Вы говорите, что возмущенный заряд создает вокруг себя электромагнитное поле, которое распространяется в окружающем пространстве со скоростью света. Это поле, в момент, когда оно достигает детектор или другие заряды, действует на них силовым образом, что мы и наблюдаем непосредственно или с помощью приборов. Но то же самое я могу объяснить по другому. Заряженные частицы действуют друг на друга непосредственно без всякого посредника в тот момент, когда они находятся на световых конусах друг друга. Световой конус — это релятивистски инвариантный объект в 4-мерном мире Минковского. Поэтому факт взаимодействия не зависит от системы отсчета, хотя его количественное описание будет зависеть от ее выбора. Сила взаимодействия, выводимая из принципа действия Фоккера-Тетроде, выражается правой частью уравнений (7.50). В отличие от нерелятивистского закона Кулона, она устроена сложнее: она зависит от ускорений и скоростей и содержит запаздывание (и опережение, если не учитывать поглотитель). На самом деле, именно это выражение и имеет практическое значение. Вспомним, как определяется напряженность электрического поля: это сила, действующая на единичный заряд. Напряженность электрического поля нужна нам лишь для того, чтобы определить электрическую силу: $\vec{F} = q\vec{E}$. Последняя формула — это мостик между механикой и электростатикой. Аналогичный силовой смысл имеет и индукция магнитного поля. Все дело в том, что любой эксперимент, связанный с измерением электромагнитного поля, сводится (на языке теории поля) к взаимодействию поля с заряженными частицами: пробными свободными частицами или связанными заряженными частицами регистрирующей части экспериментальной установки. *На опыте вы никогда не имеете дело с самим электромагнитным полем, но всегда только с его действием на пробные заряды.* Поэтому волну возмущения ваших детекторов необязательно истолковывать как электромагнитную волну, хотя возможно, такое истолкование достаточно наглядно. На языке дальнодействия, детекторы реагируют непосредственно на возмущение частицы в тот момент, когда оказываются на световом конусе возмущающей частицы. Поскольку в уравнение светового конуса входит инвариантная скорость света $c$, для любого наблюдателя такое непосредственное взаимодействие *будет выглядеть как распространяющаяся волна.* Но в дальнодействующей формулировке электродинамики мы будем объяснять это явление как результат специфической инвариантной пространственно-временной организации электромагнитного взаимодействия.

А: — Возможно, что формально Ваши объяснения правильны. Но ведь хорошо известно, что электромагнитное поле переносит энергию и импульс. Импульс электромагнитного поля может передаваться протяженным телам, а энергия поля может совершать работу, как это происходит, например, в конденсаторе. Если электромагнитного поля нет, то как Вы ответите на вопрос: где находится энергия частицы, излученная ей в некоторый момент времени, в моменты времени более поздние, но предшествующие актам поглощения этой энергии другими частицами в окружающем пространстве?

В: — Я напомню, что в дальнодействующей кулоновской или амперовской формулировке электростатики и магнитостатики энергией обладают лишь заряды и токи. При этом эта энергия складывается из обычной кинетической энергии движения частиц и потенциальной энергии их электростатического или магнитостатического взаимодействия. Носителями этих видов энергии являются сами частицы или токи. Другими словами, можно сказать, что в нерелятивистском варианте дальнодействующей электродинамики (по сути, речь идет лишь об электростатике и магнитостатике), энергия локализована на частицах и токах. В случае электродинамических явлений начинают проявляться релятивистские эффекты запаздывания. В этом случае, на языке теории поля мы говорим, что у поля появляются импульс и поток энергии в пространстве. На языке дальнодействия придется пересмотреть определение того, что мы называем энергией и импульсом системы электромагнитно взаимодействующих частиц. На самом деле, важность энергии и импульса определяется фактом их сохранения для замкнутой системы частиц, который в свою очередь вытекает общей теоремы Нетер, связывающей законы сохранения с симметриями действия рассматриваемой физической системы. Если теорему Нетер применить к действию Фоккера-Тетроде, то выражения для энергии и импульса системы получатся нелокальными, т.е. содержащими интегралы по отрезкам мировых линий, но, разумеется, не содержащими энергетических характеристик посредника — электромагнитного поля. Если в дальнодействующей формулировке пользоваться правильными определениями импульса и энергии, то она воспроизведет те же самые наблюдаемые следствия с пробными частицами, что и полевая электродинамика.

С: — Так где же, все таки, будет находиться энергия в промежуток времени между актами излучения и поглощения?

В: — Вопрос явно навеян полевыми представлениями. Энергия всегда будет "размазана" по мировым линиям взаимодействующих частиц. В энергию системы в данный момент времени дают вклад характеристики мировых линий частиц как в прошлом, так и в будущем, возможно даже довольно отдаленных.

А: — Согласно теории Фоккера-Тетроде эффективный потенциал электромагнитного поля существует только в тех точках пространства-времени, в которых световые конусы источников пересекают мировые линии других частиц. Но в полевой формулировке потенциалы определены во всем пространстве. Значит полной эквивалентности между этими теориями нет!

В: — Полной эквивалентности, конечно, нет, но по другой причине (например, в случае неполного поглощения, когда проявляются опережающие эффекты). Потенциал теории поля описывает *потенциальное воздействие источника в каждой точке пространства, если бы в эту точку был помещен пробный заряд.* В отличие от этого, эффективный потенциал в теории дальнодействия всегда описывает *актуальное действие источника на реальные заряды.* Проверка правильности потенциального полевого описания будет заключаться в помещении в данную точку реального заряда и наблюдении за ним. Но в этой ситуации мы имеем дело с реальным зарядом, который можно описывать эффективным потенциалом дальнодействующей формулировки. Поскольку заряд либо есть, либо нет, то две формулировки эквивалентны: в первом случае они дадут одно и тоже, во втором — отсутствие эффективного потенциала в свободной от зарядов области пространства в дальнодействующей формулировке эквивалентно отсутствию зарядов в полевой. И в том, и другом случае мы ничего не наблюдаем.

A: — Хорошо, а как быть с самими источниками? В теории Фоккера-Тетроде всякий эффективный потенциал имеет источники, в то время как уравнения Максвелла допускают решение уравнений без источников, например, плоские волны.

B: — Все реалистичные решения свободных уравнений Максвелла имеют особенности. Эти особенности и есть источники свободных электромагнитных волн. Решение в виде плоской волны представляет собой физическую идеализацию: не существует никакого реального источника, который мог бы создать такую волну. Впрочем, плоская волна служит хорошим приближением для поля излучения островных систем, рассматриваемого на большом расстоянии от них.

A: — Несмотря на кажущуюся убедительность Ваших доводов, картина электромагнитных явлений на языке дальнодействия оказывается довольно туманной и запутанной. Кроме того, в Ваших аргументах я не нахожу веских причин, по которым я мог бы отказаться от мысли о реальности электромагнитного поля. Есть много понятий, которые используются для обозначения непосредственно ненаблюдаемых сущностей: атомы, ядра, волновая функция. Даже температуру и давление мы измеряем по высоте ртутного столба. Отсюда не следует, что сущностей, которые стоят за этими понятиями не существует.

B: — Замечу, что температура и давление — это характеристики, а не сущности. Сущностями в приведенных Вами примерах являются объекты микромира: молекулы, атомы, ядра и т.д. Классические представления об этих объектах, как о шариках или гантельках малых размеров оказались несостоятельными. Квантово-механическое описание этих объектов на языке волновой функции приводит к заключению, что эти объекты не могут иметь точно определенной формы, координат и импульсов, угловой ориентации и момента импульса и т.д. Для выражения этой ситуации был придуман специальный термин — корпускулярно-волновой дуализм. На самом деле, ситуация здесь вполне аналогична с полевым описанием взаимодействий. Мы привыкли считать частицы материи дискретными образованиями, но поскольку они проявляют волновые свойства, мы просто приспосабливаем старый язык для выражения новых ситуаций и понятий. Существует мнение, что парадоксы и странности квантовой механики связаны с тем, что ее нынешняя формулировка является неокончательной и строится на основе привычного языка, уходящего корнями в классическую механику. После того, как будет найден другой, более адекватный язык, явления микромира будут выглядеть более естественно. При этом некоторые сущности могут исчезнуть с физической арены, а на их место могут прийти новые. Так, с позиций современной (полевой!) теории суперструн все перечисленные Вами сущности микромира являются различными возбужденными состояниями одной сущности — релятивистской струны, помещенной в многомерное пространство-время.

С: — Но с течением времени, по мере развития физики, вместо релятивистской струны могут появиться иные сущности, лучше выражающие свойства реальности!

В: — Вообще-то физика имеет дело с явлениями, а не сущностями. Другими словами, она лучше приспособлена к ответам на вопрос "Как?", чем на вопрос "Почему?". Ответ на первый вопрос, отнесенный к движению небесных тел, мало изменился на протяжении XX века — были вычислены лишь небольшие поправки, — в то время как ответ на вопрос "Почему?" изменился кардинально. На место ньтоновской силы гравитационного притяжения пришла риманова геометрия и геодезические. Разумеется, обе модельные сущности приспособлены для описания одних и тех же явлений.

А: — Все правильно, просто ОТО объясняет хорошо наблюдаемые гравитационные эффекты: смещение перигелия Меркурия, искривление лучей света массивными телами и т.д., а силовая механика Ньютона — нет. Поэтому кривизну пространства сегодня можно считать такой же реальностью, как и электромагнитное поле.

В: — Замечу, что в рамках теории струн гравитация возникает как эффективная теория, возникающая при квантовании струны. Если со временем теория струн станет общепринятым рабочим инструментом физиков, то Вам придется заменить "реальность кривизны" "реальностью струны"!

С: — Тогда что такое реальность?

B: — Еще раз подчеркну, что физика имеет дело с явлениями и строит свои модели для объяснения явлений. Природа наших научных знаний такова, что "вспомогательные сущности", которые мы вводим для объяснения явления могут не иметь прямого отношения к действительной сущности явления. Они и не обязаны иметь его, поскольку основная задача физики — правильно описать явление. Я проиллюстрирую свою мысль несколько парадоксальным, в свете нашей дискуссии, примером электродинамики, которая, в определенном смысле, антагонистична электродинамике Фоккера-Тетроде, т.е. такой, которая формулируется только на языке полей без введения зарядов и токов.

C: — А что, есть и такая?

B: — Разумеется. В обычной постановке задач стандартной электродинамики мы рассчитываем поля по заданным распределениям зарядов и токов. Рассмотрим обратную задачу: по заданному электромагнитному полю вычислим распределения зарядов и токов. Эта задача в техническом отношении даже проще, чем первая, поскольку сводится к вычислению определенных комбинаций производных поля в соответствии с уравнениями Максвелла, содержащими источники. А теперь пойдем еще дальше и *определим* точечный электрический заряд как поток электрического поля через поверхность, охватывающую его точечную особенность. В такой чисто полевой теории возникнут свои характерные трудности, но ее эквивалентность стандартной электродинамике Максвелла, в принципе, очевидна. Выбирайте тот подход, который Вам больше нравится!

A: — По-Вашему выходит, что мир вообще непознаваем?

B: — Я говорю лишь о том, что нельзя отождествлять модель мира с ним самим.

A: — Хорошо. Закон сохранения энергии — это тоже модель? Но он выполняется всегда и у нас нет никаких оснований думать, что существуют условия, при которых он мог бы не выполняться.

B: — Здесь следует провести границу между *физическими законами* и *физическими принципами*. Физические принципы — *это наиболее общие правила нашего мышления об окружающем мире*. Они не проверяются экспериментально, а выбираются нами в значительной мере свободно и в большей мере выражают наши философские взгляды о мире, чем какие-то конкретные сведения о нем. В отличие от принципов, законы проверяются экспериментально, но их конкретный вид зависит от выбранных нами принципов. Приведу пример. *Все три закона Ньютона — это, на самом деле, не законы, а принципы* [33]. Законами в механике Ньютона являются конкретные выражения для сил, например, закон всемирного тяготения или закон Кулона в дальнодействующей формулировке. С другой стороны, в ОТО с ее принципом геометризации, используемым вместо принципов механики Ньютона, нет закона всемирного тяготения. Вместо него роль "законов" будут играть конкретные выражения для тензора энергии-импульса, входящего в правую часть уравнений Эйнштейна. Эксперимент никогда не определяет однозначно тех принципов, которые мы могли бы использовать для его описания. Однако, он может обнаружить, что одни принципы дают более или менее удобное объяснение явлений, чем другие. Отмеченные Вами релятивистские гравитационные эффекты можно было бы объяснить, оставаясь в рамках механики Ньютона, но это объяснение выглядело бы более громоздким и, конечно, более искусственным, чем в ОТО. Интересные мысли по этому поводу можно найти у Пуанкаре [34].

С: — А какие еще принципы имеются в физике?

В: — К числу физических принципов относятся: принцип близкодействия или дальнонодействия, калибровочный принцип, принцип симметрии, принцип наименьшего действия, принцип сохранения энергии...

А: — Постойте, постойте. Закон сохранения энергии вытекает из принципа наименьшего действия, если действие инвариантно относительно сдвигов во времени. Таким образом, выделение закона сохранения энергии в отдельный принцип логически не оправдано!

В: — Принцип сохранения энергии понимается шире: не для всякой динамической системы можно сразу записать действие, уже хотя бы потому, что у системы могут быть какие-то дополнительные и пока не обнаруженные степени свободы. Если эти степени свободы участвуют в процессах взаимодействия системы, то мы будем явно наблюдать "нарушение закона сохранения энергии". Мы могли бы констатировать факт такого нарушения и на этом остановиться. Однако принцип сохранения энергии, которого мы придерживаемся в наших рассуждениях о природе, заставляет нас искать объяснение, в котором энергия бы сохранялась. Именно принцип сохранения энергии позволил открыть почти неуловимую частицу нейтрино в начале 30-х годов XX века при исследовании $\beta$-распада ядер.

С: — Но частица нейтрино позже проявила себя и в других процессах взаимодействия элементарных частиц, а также была обнаружена в космических лучах...

В: — В физике элементарных частиц есть свои устоявшиеся принципы. Явления, наблюдаемые в космических лучах или ускорителях, принято описывать на языке фундаментальных частиц материи — фермионов и переносчиков их взаимодействий — бозонов. Принципы теории квантованных полей очерчивают правила нашего мышления о мире элементарных частиц: лагранжианы, коммутационные соотношения, формализм $S$-матрицы и т.д. Принцип сохранения энергии, конечно, заложен в структуру любой локальной квантовой теории поля, поскольку лагранжиан любого фундаментального поля не должен зависеть от времени. Однако, в теории элементарных частиц, построенной на других принципах (скажем, в нелокальной теории поля или в квантовой теории поля в сильно нестационарном пространстве-времени вблизи космологической сингулярности), тот же "эффект нейтрино" мог бы получить совершенно другое объяснение, вообще не связанное с существованием новой "фундаментальной частицы".

С: — Хотелось бы вернуться к статусу электромагнитного поля. Значит, все-таки, электромагнитное поле нельзя считать реальностью?

В: — Хорошо. Подведем маленький итог. Мы можем говорить об одних и тех же электромагнитных явлениях на двух разных языках. При этом язык электродинамики Максвелла использует понятие электромагнитного поля, а язык дальнодействия обходится без него, ничего не теряя в смысле информативности и точности описания. После обсуждения роли принципов в физике мы не находим ничего странного в том, что об одном и том же можно говорить совсем по-разному. Правила перевода с одного языка на другой могут быть совсем не простыми. Ситуация с электродинамикой проще и интереснее: *за исключением электромагнитного поля, понятия близкодействующей и дальнодействующей формулировки электродинамики совпадают.* Это означает, что *электромагнитное поле — вспомогательная конструкция, удобная для наглядного объяснения и истолкования электромагнитных явлений.* Но если роль некоторой предполагаемой "сущности" в физической теории зависит от достаточно произвольного выбора правил нашего мышления о мире, т.е. от выбора физических принципов, то, эта "сущность" очевидно, не может быть физической реальностью. Во всяком случае, предположение о том, что физическая реальность может зависеть от нашего мировоззрения и личных философских установок выглядит довольно странно. Впрочем, не исключено, что физика будущего приведет нас к необходимости уточнения того, что мы называем объективной физической реальностью.

A: — Но разве простота описания не является желательным и даже необходимым качеством физической теории? Ведь очевидно, что теория электромагнитного поля проще!

B: — Концепция электромагнитного поля порождает свои собственные проблемы, связанные с его свойствами: бесконечная собственная энергия электрона и энергия электромагнитного вакуума, расходимости в диаграммах Фейнмана, необходимость квантования электромагнитного поля и т.д. Следует отметить, что некоторые из этих проблем перекочевывают и в дальнодействующую формулировку в несколько видоизмененной форме, но этих проблем там меньше, поскольку полевые степени свободы отсутствуют.

Впрочем, действительно, следует признать, что принцип простоты — один из важных физических принципов. "Бритва Оккама" ("Не измышляй лишних сущностей") — это и есть его выражение в науке. Интересно, что сторонники чисто полевой формулировки электродинамики, в которой заряды и токи определяются через поля, могли бы развернуть мои аргументы в противоположную сторону и сказать, что заряды и токи — вспомогательные понятия, которые так же не могут иметь статуса объективной реальности. Споры о том, кто здесь прав, скорее всего, будут безрезультатными. Не исключено, что правы обе стороны!

C: — И как же прикажете это понимать? И поля и заряды — условность?

B: — Нет. Просто можно надеяться, что будущие исследования приведут нас к новой формулировке электродинамики, в которой не будет ни полей, ни зарядов. При этом и те и другие будут возникать как вторичные понятия, вытекающие из более фундаментальных сущностей, не допускающих внутри себя дуализма типа "частицы-поля".

# Приложения. Основные сведения: механика, теория поля, теория относительности, электродинамика, космология

## А. Принцип наименьшего действия

Принцип наименьшего действия — один из основных современных инструментов для формулировки и теоретического исследования физических теорий и уравнений [35, 36].

### А.1. Геометрия

Рассмотрим две точки $A_1$ и $A_2$ в евклидовом пространстве и семейство кривых $\{\gamma_{A_1A_2}\}$ с концами в точках $A_1$ и $A_2$. Среди всех кривых этого семейства выделяется одна — прямолинейный отрезок $A_1A_2$, обладающий очевидным экстремальным свойством:

$$l[A_1A_2] = \min_{\gamma_{A_1A_2}} l[\gamma_{A_1A_2}],$$

где $l[\gamma_{A_1A_2}]$ — евклидова длина кривой $\gamma_{A_1A_2}$. В случае гладких кривых эта длина представляется интегралом:

$$l[\gamma_{A_1A_2}] = \int\limits_{\gamma_{A_1A_2}} dl = \int\limits_{\tau_{A_1}}^{\tau_{A_2}} \sqrt{\dot{x}_1^2(\tau) + +\dot{x}_2^2(\tau) + \dot{x}_3^2(\tau)}\, d\tau, \qquad (A.54)$$

где в последнем равенстве использовано параметрическое представление кривой $\gamma_{A_1A_2}$ с помощью тройки декартовых координат $\{x_1, x_2, x_3\}$, рассматриваемых как функции параметра $\tau$ (координата на кривой). Точка обозначает дифференцирование по параметру $\tau$.

Обратим внимание на характерную зависимость длины от кривой: кривая задается набором функций, а длина, вычисляемая с помощью интеграла (A.54), есть неотрицательное число. Таким образом, длину можно рассматривать как "функцию на множестве функций". Такого рода зависимости в математике называют *функционалами.* Использование квадратных скобок для аргумента функционала вместо круглых, как у обычной функции, служит для напоминания особой природы функционала. Другими важными примерами функционалов, которые встречаются в физике, являются: масса, заряд, энергия, импульс, действие (см. ниже) и другие.

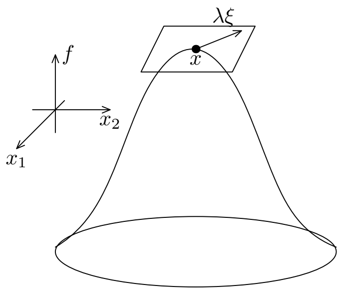



Рис. 1.1. Геометрический смысл условия экстремума (A.56). В точке экстремума производная функции по любому направлению равна нулю.

Для аналитического исследования экстремальных свойств функционалов применяется функциональное обобщение соответствующих идей и методов математического анализа — *вариационное исчисление.* Как известно, необходимым условием локального экстремума гладкой функции[11] $\phi(x)$ является обращение в нуль ее дифференциала:

$$d\phi = 0. \tag{A.55}$$

Этому условию можно придать наглядный геометрический смысл (см. рис. 1.1), если записать его несколько по иному:

$$\frac{d}{d\lambda}\phi(x+\lambda\xi)|_{\lambda=0} = (\xi\cdot\nabla)\phi(x) = 0, \tag{A.56}$$

где $\xi$ — произвольный вектор, начинающийся из точки $x$, $\lambda$ — параметр (координата вдоль направления $\xi$), $\nabla$ — дифференциальный оператор, состоящий из частных производных по координатам $x$. Функциональным обобщением условий (A.55)-(A.56), записанных, к примеру, для функционала длины, являются следующие выражения:

$$\delta l = 0 \tag{A.57}$$

[11]Здесь и далее для краткости мы обозначаем всю совокупность координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ одной буквой $x$.

или

$$\frac{d}{d\lambda} l[x(\tau) + \lambda\xi(\tau)]|_{\lambda=0} = 0, \qquad (A.58)$$

где символ $\delta$ обозначает функциональный вариант дифференциала, называемый *вариацией* функционала $l$, $\xi(\tau)$ — произвольная вектор-функция, задающая вариацию кривой, иногда обозначаемая $\delta x(\tau)$. Смысл выражений (A.57)-(A.58) остается прежним: *значение функционала на экстремальной кривой (или, в общем случае, функции из области определения функционала) не изменяются, если экстремальную кривую "немного пошевелить", т.е. заменить на близкую кривую.*

Соотношение вида (A.57) используют для краткой записи условия экстремума, а соотношение вида (A.58) — для вычисления его явного вида в конкретных случаях. Рассмотрим в качестве примера задачу об экстремуме функционала вида:

$$F[x(\tau)] = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(\dot{x})\, d\tau,$$

где $f$ — произвольная дифференцируемая функция трех переменных $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$. Будем полагать при этом, что экстремум отыскивается среди кривых с фиксированными концами: $x(\tau_1) = X_1 = \mathrm{const}, x(\tau_2) = X_2 = \mathrm{const}$. Используя стандартные сведения из анализа, получаем:

$$F[x(\tau) + \lambda\xi(\tau)] = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(\dot{x} + \lambda\dot{\xi})\, d\tau = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(\dot{x})\, d\tau + \lambda \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \dot{\xi}_i\, d\tau + o(\lambda), \qquad (A.59)$$

Здесь и далее мы используем полезное сокращенное обозначение для суммирования по повторяющимся индексам (правило суммирования Эйнштейна):

$$a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{N} a_i b_i,$$

где $N$ — число компонент величин $a$ и $b$. Выполняя во втором слагаемом правой части (A.59) стандартное интегрирование по частям, приходим к следующему выражению для этого слагаемого:

$$\lambda \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \dot{\xi}_i \, d\tau = \lambda \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \xi_i \right) d\tau - \lambda \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) \xi_i \, d\tau. \quad (A.60)$$

Явное вычисление первого слагаемого в правой части (A.60) (первообразная полной производной), приводит к выражению:

$$\lambda \left( \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \xi_i \right|_{\tau=\tau_2} - \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \xi_i \right|_{\tau=\tau_1} \right),$$

которое обращается в нуль ввиду условия фиксации конечных точек $\xi(\tau_1) = \xi(\tau_2) = 0$ (конечные точки кривых, среди которых отыскивается экстремаль, — не варьируются!). Подставляя оставшееся выражение из (A.60) в (A.59), а затем (A.59) в (A.58) и выполняя дифференцирование по параметру $\lambda$, приходим к необходимому условию экстремума в виде:

$$\delta F = - \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) \xi_i \, d\tau = 0 \quad (A.61)$$

Ввиду произвольности, взаимной независимости и непрерывности вариаций $\xi_i$, обращение в нуль интеграла (A.61) эквивалентно условиям:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (A.62)$$

представляющим собой систему дифференциальных уравнений второго порядка. За исключением нескольких особых случаев (например, когда функция $f$ линейна по всем аргументам или по их части) ее полными интегралами являются линейные функции: $x_i(\tau) = \alpha_i \tau + \beta_i$, где $\alpha_i, \beta_i$ — константы интегрирования, определяемые из дополнительных условий. В частности, для функционала длины (A.54), у которого $f = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}$, мы можем интерпретировать полученный результат как экстремальное свойство прямых. При этом константы интегрирования, входящие в параметрические уравнения семейства прямых, определятся из условий $x(\tau_1) = X_1$, $x(\tau_2) = X_2$.

## А.2. Механика

Отметим, что условие экстремума функционалов в виде интегралов от функции $f = f(x, \dot{x}, \tau)$ более общего вида, чем рассмотренный нами в примере предыдущего раздела, как нетрудно убедиться, также приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Это обстоятельство является ключевым для вариационной формулировки законов классической механики Ньютона. Применение вариационных методов в механике основано на следующих наблюдениях и гипотезах, которые можно сделать на основе результатов предыдущего раздела.

1. **Наблюдение 1**. Условие экстремальности функционала вида

$$F[x] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, \dot{x}, \tau)\, d\tau \tag{A.63}$$

имеет вид системы дифференциальных уравнений второго порядка, т.е. соответствует структуре уравнений ньютоновской динамики.

2. **Гипотеза 1 (аксиома в механике Ньютона идеальных систем)**. Для каждой механической системы $N$ материальных точек с начальным состоянием $x(t_1) = X_1$ и конечным состоянием $x(t_2) = X_2$ (здесь $x = \{x_1, \ldots x_{3N}\}$ — набор декартовых координат всех $N$ точек, $t$ — абсолютное время механики Ньютона) существует "физическое расстояние" $\mathcal{A}$, зависящее от способа эволюции системы из $X_1$ в $X_2$, которое минимально, когда система эволюционирует в соответствии с уравнениями ньютоновской динамики. Это "физическое расстояние" называется *действием* (action (англ.)) механической системы. Функцию $f$, определяющую функционал $\mathcal{A}$ и его свойства, называют *функцией Лагранжа* механической системы и традиционно в физике обозначают $L$. Другими словами, вариационная формулировка законов механики предполагает существование функционала действия:

$$\mathcal{A}[x] = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)\, dt,$$

условие экстремальности которого влечет справедливость уравнений ньютоновской динамики:

$$\delta\mathcal{A} = 0 \Rightarrow \text{уравнения динамики Ньютона.} \qquad (A.64)$$

3. **Наблюдение 2**. Экстремалями функционала (A.63) с функцией $f$, зависящей только от производных $\dot{x}$, являются прямые.

4. **Гипотеза 2 (Первый закон Ньютона)**. Функция Лагранжа свободных частиц имеет вид $L_0 = L_0(\dot{x})$.

Дальнейшая конкретизация вида механического действия с учетом принципа относительности Галилея, соображений аддитивности и соответствия уравнениям механики Ньютона (A.64) приводит к его следующему выражению:

$$\mathcal{A}[x] = \int\limits_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt, \qquad (A.65)$$

где

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_{(i)}\dot{\vec{x}}^2_{(i)}}{2} \qquad (A.66)$$

— полная кинетическая энергия системы частиц ($m_{(i)}$ — масса $i$-ой точки, $\vec{x}_{(i)}$ — радиус-вектор положения $i$-ой частицы), $U = U(x)$ — потенциальная энергия этой системы, связанная с равнодействующей $\vec{F}_{(i)}$ сил, действующих на $i$-ую точку соотношением:

$$\vec{F}_{(i)} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_{(i)}}. \qquad (A.67)$$

Здесь и далее производная по вектору понимается как совокупность частных производных по его компонентам. Вычисления по формуле (A.58), аналогичные проведенным в предыдущем разделе, приводят к условиям экстремума следующего вида:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\right) = 0, \qquad (A.68)$$

называемым в механике *уравнениями Эйлера-Лагранжа.* Уравнения Эйлера-Лагранжа для действия (A.65) с учетом определения потенциальной энергии (A.67) принимают, как и требуется, вид уравнений динамики Ньютона:

$$m_{(i)}\ddot{\vec{x}}_{(i)} = \vec{F}_{(i)}. \tag{A.69}$$

Приведем в качестве важного примера действие и соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа для системы одинаковых частиц, попарно взаимодействующих посредством силы, обратно пропорциональной квадрату мгновенного расстояния между ними:

$$\mathcal{A}[x] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left( \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{x}}^2_{(i)} - \alpha \sum_{i<j} \frac{1}{|\vec{x}_{(i)} - \vec{x}_{(j)}|} \right) dt; \tag{A.70}$$

$$\ddot{\vec{x}}_{(i)} = \frac{\alpha}{m} \sum_{j \neq i} \frac{\vec{x}_{(i)} - \vec{x}_{(j)}}{|\vec{x}_{(i)} - \vec{x}_{(j)}|^3}. \tag{A.71}$$

Здесь $m$ — одинаковая для всех частиц масса, $\alpha$ — одинаковая для всех пар частиц константа взаимодействия (случай $\alpha > 0$ описывает отталкивание, $\alpha < 0$ — притяжение),

$$|\vec{x}_{(i)} - \vec{x}_{(j)}| = \sqrt{(\vec{x}_{(i)} - \vec{x}_{(j)}) \cdot (\vec{x}_{(i)} - \vec{x}_{(j)})}$$

— расстояние между $i$-ой и $j$-ой частицей. В правой части (A.71) стоит сумма удельных (т.е. приходящихся на единицу массы) сил кулоновского типа, действующих на $i$-ую частицу со стороны всех остальных окружающих ее частиц.

## A.3. Теория поля

Необходимость перехода к полевому описанию физических систем возникает уже в рамках классической механики при рассмотрении сплошной среды. Возникающие при этом поля (смещений, скоростей, деформаций, напряжений и т.д.) можно рассматривать как способ описания механической системы с бесконечным (даже континуальным) числом степеней свободы. Вариационная формулировка теории механических полей строится по образу и подобию вариационной формулировки механики системы материальных точек, за исключением нескольких специфических и общих для любой теории поля нюансов.

1. Вместо функции Лагранжа $L$ при полевом описании необходимо использовать ее пространственную плотность $\mathcal{L}$, которая для полей механического происхождения имеет знакомую структуру: $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$, где $\mathcal{T}$ — плотность кинетической энергии, $\mathcal{U}$ — плотность потенциальной энергии. Плотность $\mathcal{L}$ называется в теории поля *лагранжианом.* Если $u(t, x)$ — рассматриваемое поле, то лагранжиан в данной точке обычно зависит от значений поля в этой точке и совокупности всех его производных в этой точке, что мы будем отмечать с помощью символической записи $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u(t, x), \partial u(t, x))$, где $\partial u(t, x)$ — совокупность всех частных производных поля $u$ в рассматриваемой точке. Теории поля с лагранжианом, удовлетворяющим этому свойству, называются *локальными.* Именно это свойство позволяет истолковать в духе концепции близкодействия те взаимодействия, которые описывают посредством локальной теории поля. Теории поля, в которых лагранжиан в некоторой точке зависит от значений поля или его производных, взятых в разных точках, называются *нелокальными.* Небольшой существующий интерес к нелокальным теориям поля сегодня в основном обусловлен попытками решения некоторых парадоксов квантовой механики.

2. Действие полевой системы необходимо распространить на 4-мерную пространственно-временную область $\Omega = T \times \mathcal{V}$, где $T$ — интервал на вещественной оси времени, $\mathcal{V}$ — область 3-мерного евклидова пространства, в которой рассматривается полевая динамика. Таким образом, полевое действие имеет вид:
$$\mathcal{A}[u(t, x)] = \int\limits_{\Omega} \mathcal{L}(u, \partial u)\, d^4x, \tag{A.72}$$
где $d^4x = dt\, dV$ — формальный элемент 4-объема.

3. Граничные условия, необходимые для зануления граничных слагаемых, возникающих в процессе вычислений по формуле (A.58) при интегрировании по частям, теперь принимают вид:
$$\delta u|_{\partial\Omega} = 0$$

— обращения в нуль вариации на границе $\partial\Omega$ области интегрирования.

Условия экстремума действия (A.72) принимают в теории поля вид *полевых уравнений Эйлера-Лагранжа*:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x_\alpha)}\right) = 0. \tag{A.73}$$

Здесь $u_i$ — $i$-ая компонента поля. В практически важных случаях эти уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть $u(t,x)$ — поле поперечных деформационных смещений однородной упругой струны ($x$ — координата вдоль струны), которая имеет натяжение $T$, линейную плотность $\rho$ и на которую действует распределенная поперечная сила с линейной плотностью $f(t,x)$. Лагранжиан такой системы имеет вид:

   $$\mathcal{L}_1 = \frac{\rho}{2}\dot{u}^2 - \frac{T}{2}{u'}^2 + fu. \tag{A.74}$$

   Уравнение Эйлера-Лагранжа (A.73) для системы с таким лагранжианом принимают вид неоднородного волнового уравнения:

   $$\Box_1 u = f/\rho, \tag{A.75}$$

   где

   $$\Box_1 \equiv \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

   — 1-мерный *волновой оператор*, $c_0 = \sqrt{T/\rho}$ — скорость распространения поперечных волн на струне.

2. Пусть $\varphi(x)$ — статический электрический потенциал, создаваемый системой зарядов, распределенных в 3-мерном пространстве с объемной плотностью $\rho(x)$. Лагранжиан такой системы имеет вид:

   $$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{8\pi}(\nabla\varphi)^2 - \rho\varphi. \tag{A.76}$$

Отметим, что первое слагаемое имеет смысл плотности энергии электростатического поля ($W = \vec{E}^2/8\pi$, где $\vec{E} = -\nabla\varphi$), второе — плотности энергии взаимодействия этого поля с зарядами, которые его создают. Уравнения Эйлера-Лагранжа (A.73) принимают в рассматриваемом случае вид основного уравнения электростатики:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \tag{A.77}$$

— уравнения Пуассона.

3. Для вариационной формулировки уравнений электродинамики Максвелла, необходимо определить напряженности электрического и магнитного полей через потенциалы по формулам [4]:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}; \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}, \tag{A.78}$$

где $\varphi$ и $\vec{A}$ — скалярный и векторный потенциалы соответственно, $c$ — скорость света в вакууме, $\mathrm{rot}A = \nabla \times \vec{A}$ — ротор векторного поля $\vec{A}$. Отметим, что в случае электростатики можно положить $\vec{A} = 0$ и первая формула в (A.78) переходит в обычное условие потенциальности электрического поля. Лагранжиан электромагнитного поля, порождаемого плотностью заряда $\rho(t, x)$ и плотностью тока $\vec{j}(t, x)$, имеет вид:

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{8\pi}\left((\nabla\varphi)^2 + \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2 + \frac{2}{c}\nabla\varphi\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - (\mathrm{rot}\vec{A})^2\right) - \rho\varphi + \frac{1}{c}\vec{j}\cdot\vec{A}. \tag{A.79}$$

Отметим, что при $\vec{A} = 0$ он переходит в лагранжиан $\mathcal{L}_2$ предыдущего случая. Уравнения Эйлера-Лагранжа (A.58) в рассматриваемом случае принимают вид пары уравнений Максвелла: уравнения (A.77) и уравнения

$$\Box\vec{A} + \nabla(\mathrm{div}\vec{A}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{A.80}$$

где $\mathrm{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A}$ — дивергенция векторного поля,

$$\Box \equiv \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— релятивистский волновой оператор. Отметим, что на языке напряженностей эти уравнения имеют более привычный вид теоремы Гаусса и закона Эрстеда в дифференциальной формулировке:

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho; \quad \mathrm{rot}\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{A.81}$$

Вторая пара уравнений:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{A.82}$$

выполняется тождественно в силу определения (A.78) и тождеств $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} \equiv 0$ и $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0$.

## B. Дельта-функция и функции Грина

На ранних этапах развития современных полевых концепций существовал некоторый разрыв в описании сосредоточенных объектов, типа точечных масс, зарядов и т.д. и распределенных в пространстве и времени величин. Если, к примеру, плотность заряда понимать как предел:

$$\rho(x) = \lim_{\Delta V(x)\to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V(x)}, \tag{B.83}$$

где $\Delta Q$ — заряд, заключенный внутри объема $\Delta V(x)$, стягивающегося в процессе предельного перехода к точке $x$, то в случае точечного заряда, находящегося в точке $x$, такого предела не существует. Точнее говоря, не существует функции в ее классическом смысле, к которой стремится отношение под знаком предела в (B.83). Оказывается, как показали Соболев и Шварц в 30-е годы XXв., можно расширить понятие функции таким образом, чтобы сингулярные зависимости можно было рассматривать в определенном смысле на равных правах с обычными функциями. Такое расширение, включающее в себя соответствующие обобщения понятий и теорем классического математического анализа, получило название *теории обобщенных функций.* Эта математическая теория является неотъемлемой технической частью современной квантовой теории поля [38].

Классическим (и, в определенном смысле, основным) примером сингулярной функции является т.н. *$\delta$-функция Дирака.* Пусть на отрезке $L_1 = [-1/2; 1/2]$ вещественной прямой равномерно распределен единичный заряд с плотностью $\rho_1 = 1$, а на остальной части прямой заряды отсутствуют. Рассмотрим последовательность отрезков $L_n = [-1/2^n; 1/2^n]$ и последовательность соответствующих плотностей $\rho_n = 2^{n-1}$. Последовательность $L_n$ стягивается к точке $x = 0$ при $n \to \infty$, а последовательность $\rho_n$ неограниченно возрастает. При этом, как нетрудно проверить непосредственным вычислением, полный заряд распределения с любым номером $n$ остается постоянным и равным 1:

$$Q = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_n \, dx = 1$$

(функцию плотности заряда мы рассматриваем определенной на всей вещественной оси, поэтому пределы интегрирования бесконечные). Поместим теперь наши распределения зарядов во внешнее поле с потенциалом $\varphi(x)$ и подсчитаем энергию его взаимодействия с $n$-ым распределением. Имеем

$$W_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\rho_n \, dx = \int\limits_{-1/2^n}^{1/2^n} \varphi(x) 2^{n-1} \, dx = \varphi(a_n).$$

Здесь для получения последнего равенства мы применили формулу среднего значения, при этом точка $a_n \in L_n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и вводя обозначение $\rho_\infty = \delta(x)$ получаем из предыдущего выражения стандартную формулу для энергии взаимодействия внешнего поля с единичным точечным зарядом, помещенным в точке $x = 0$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x) \, dx = \varphi(0). \tag{B.84}$$

В теории обобщенных функций формула (B.84) рассматривается как *определение $\delta$-функции Дирака $\delta(x)$: при интегрировании произведения $\delta$-функции $\delta(x)$ с любой функцией $\varphi(x)$, не имеющей особенностей в точке $x = 0$, интеграл принимает значение $\varphi(0)$.*

Непосредственно из определения (В.84) вытекают следующие свойства $\delta$-функции Дирака:

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$ (условие нормировки);
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x-a)\,dx = \varphi(a)$ (сдвиг координаты);
3. $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$ (изменение масштаба).
4. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a)/2$ (особенность на границе интервала интегрирования).

В приведенных формулах $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная функция, $a$ — произвольная вещественная константа. Вторая и третья формулы являются частным случаем общего правила функциональной замены переменной в аргументе $\delta$-функции:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \tag{В.85}$$

где $\{x_i\}$ — совокупность корней уравнения $f(x_i) = 0$, а $f$ — произвольная дифференцируемая функция, не имеющая кратных нулей.

Следует заметить, что обозначение $\delta(x)$, термин "функция" применяемый к нему, а также свойства $\delta$-функции Дирака имеют символический смысл. Придание им точного смысла подразумевают использование $\delta$-функции под знаком интеграла в соответствии с определением (В.84). С точки зрения функционального анализа, $\delta$-функцию правильнее называть не функцией, а функционалом (см. определение на стр. 87). Несмотря на практическое удобство символических формул с $\delta$-функцией, не следует забывать об ее особой природе. Так, к примеру, выражению $\delta^2(x)$ уже нельзя придать никакого (даже символического) смысла.

С помощью $\delta$-функции Дирака легко записать явные выражения для плотности дискретных распределений. Так, для массы $m$, сосредоточенной в точке $a$ на вещественной прямой имеем линейную плотность:

$$\rho(x) = m\delta(x-a).$$

Для массы, сосредоточенной в точке $(x_0, y_0, z_0)$ 3-мерного пространства:

$$\rho(x, y, z) = m\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0),$$

где смысл произведения $\delta$-функций от разных переменных раскрывается с помощью свойства 1 и интегральной формулы:

$$\int\limits_{R^3} \rho(x)\, dV = m \int\limits_{R^3} \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)\; dx\, dy\, dz =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\, dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0)\, dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - z_0)\, dz = m.$$

Действие мгновенного источника силы в момент времени $t = t_0$ в точке $(x_0, y_0, z_0)$ описывается плотностью импульса:

$$f(t, x, y, z) = P\delta(t - t_0)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0),$$

где $P$ — конечная величина импульса, сообщенная этой силой. Плотность массы совокупности $N$ частиц с массами $m_i$, движущихся по законам $\vec{x}_{(i)}(t)$ $(i = 1, \ldots, N)$, дается выражением:

$$\rho(t, x, y, z) = \sum_{i=1}^{N} m_{(i)}\delta(\vec{x}_{-}\vec{x}_{(i)}(t)),$$

где $\delta(\vec{x}_{-}\vec{x}_{(i)}(t)) \equiv \delta(x - x_{(i)}(t))\delta(y - y_{(i)}(t))\delta(z - z_{(i)}(t))$. Наконец, 3-мерная плотность тока, образуемого системой движущихся зарядов $q_{(i)}$ с законами движения $x_{(i)}(t)$, имеет вид:

$$\vec{j}(t, x, y, z) = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{R^3} q_{(i)}\delta(\vec{x} - \vec{x}_{(i)}(t))\vec{v}_{(i)}. \tag{B.86}$$

Теория обобщенных функций позволяет обосновать и развить технику дифференцирования и интегрирования сингулярных обобщенных функций. При этом большинство стандартных правил дифференцирования и интегрирования из классического анализа остаются без изменений. Производная $\delta'(x)$ $\delta$-функции Дирака определяется интегральной формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi'(x)\,dx = -\varphi'(0), \tag{B.87}$$

где $\varphi$ — произвольная дифференцируемая функция. Эвристический (но, конечно, не строгий) "вывод" этого определения заключается в применении правила интегрирования по частям в первом равенстве. При этом, поскольку $\delta$-функция "обращается в нуль" в бесконечно удаленных точках, внеинтегральные слагаемые исчезают.

Кроме возможности описания сингулярных распределений, аппарат обобщенных функций предоставляет естественные и эффективные средства решения классических задач математической физики. Такие задачи в физической постановке возникают всякий раз, когда рассматриваемая физическая система описывается физическим полем или совокупностью полей, подчиняющихся линейным дифференциальным уравнениям. В частности, все рассмотренные в Приложении А примеры полевых системы приводят в конкретных ситуациях к одному из типов задач математической физики.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение $m$-ого порядка в частных производных общего вида:

$$Lu = f(x). \tag{B.88}$$

Здесь $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — совокупность независимых переменных, $u(x)$ — неизвестная функция, $L$ — линейный дифференциальный оператор вида:

$$L = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha},$$

где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, показывающий тип частного дифференцирования в соответствующем слагаемом, $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ — его порядок, $a_\alpha(x)$ — коэффициент уравнения (бесконечно-дифференцируемая функция). Например, дифференциальный оператор релятивистского волнового уравнения: $\Box\Phi = 0$ описывается следующим набором отличных от нуля коэффициентов ($n = 3$, $x_0 = ct$):

$$a_{(2,0,0,0)} = -a_{(0,2,0,0)} = -a_{(0,0,2,0)} = -a_{(0,0,0,2)} = 1,$$

а для уравнения Пуассона (A.77) набор отличных от нуля коэффициентов таков:

$$a_{(0,2,0,0)} = a_{(0,0,2,0)} = a_{(0,0,0,2)} = 1.$$

Правая часть уравнения (B.88) в физических приложениях описывает источники (силы, заряды, токи, нагреватели) соответствующих физических полей. В силу линейности общее решение уравнения (B.88) имеет вид суммы $u_0 + \bar{u}$ общего решения $u_0$ однородного уравнения $Lu_0 = 0$ и некоторого частного решения $\bar{u}$ неоднородного уравнения $L\bar{u} = f$. Для нахождения констант (точнее, произвольных функций), содержащихся в общем решении неоднородного уравнения, необходимо надлежащим образом задать начально-краевые условия задачи, обычно вытекающие из ее физического контекста. Идея применения аппарата обобщенных функций для решения задач математической физики заключается в следующем. Представим произвольный источник $f(x)$ поля в виде следующего разложения:

$$f(x) = \int\limits_{R^{n+1}} f(\xi)\delta(x-\xi)\, d\xi. \tag{B.89}$$

Здесь

$$\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n), \quad \delta(x-\xi) = \delta(x_0-\xi_0)\ldots\delta(x_n-\xi_n), \quad d\xi = d\xi_0\ldots d\xi_n.$$

Математически формула (B.89) — элементарное следствие свойства 2 $\delta$-функции. Физически эта формула представляет произвольный источник как суперпозицию (континуальную сумму) точечных источников $\delta(x-\xi)\, d\xi$ с амплитудами $f(\xi)$. В силу линейности уравнения частное решение $\bar{u}$ для поля, создаваемого суперпозицией источников $f = f_1 + f_2$ будет равно сумме решений для полей $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$, создаваемых каждым источником по отдельности: $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$. Рассмотрим теперь символическое уравнение вида:

$$L\mathcal{E} = \delta(x-\xi). \tag{B.90}$$

Согласно сделанным замечаниям, для нахождения частного решения уравнения (B.88), достаточно найти решение более простого уравнения (B.90) с универсальным $\delta$-образным источником, а затем просуммировать эти решения с амплитудами $f$. Решение $\mathcal{E}$ уравнения

(В.90), рассматриваемое, вообще говоря, в классе обобщенных функций, называется *фундаментальным решением* или *функцией точечного источника* или *функцией влияния* или *функцией Грина* дифференциального оператора $L$. Функция Грина имеет простой физический смысл: она описывает поле, порожденное мгновенным точечным источником, действующим в точке $x = \xi$. Полная картина поля, создаваемого реальным источником, получается суммированием точечных возмущений с помощью соотношения:

$$\bar{u}(x) = \int\limits_{R^{n+1}} \mathcal{E}(x-\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{В.91}$$

Разумеется, функция Грина любого линейного дифференциального оператора определена с точностью до $u_0$ — решения однородного уравнения.

Регулярным методом отыскания функций Грина дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами является метод преобразования Фурье. Напомним, что фурье-образом $F_f(\xi)$ функции $f(x)$ называется результат следующего интегрального преобразования (если интеграл существует):

$$F_f(\xi) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\xi \cdot x)}\, dx, \tag{В.92}$$

где $x$ и $\xi$ можно понимать как совокупности $n$ переменных, $dx$ — элемент интегрирования в $R^n$, $\xi \cdot x$ — евклидово скалярное произведение в $R^n$. С физической точки зрения $F_f(\xi)$ определяет амплитуду гармоники с частотами $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, входящую в исходную функцию $f(x)$. При этом формула обратного преобразования Фурье:

$$F^{-1}_{F_f}(x) \equiv f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_f(\xi) e^{i(\xi \cdot x)}\, d\xi, \tag{В.93}$$

представляет исходную функцию в виде суперпозиции гармоник с амплитудами $F_f(\xi)$. Если функция $f(x)$ — периодическая (по всем переменным или по их части), то интеграл фурье-разложения (В.93) переходит в сумму по частотам, кратным набору основных частот (по всем переменным или по их соответствующей части). Наряду с линейностью и однородностью, важное свойство преобразования Фурье выражается формулой:

$$F_{\partial^{|\alpha|}f/\partial^{\alpha}x}(\xi) = (-i\xi)^{|\alpha|}F_f(\xi). \tag{B.94}$$

Другими словами, *фурье-образ производной равен произведению некоторого полинома (точнее, монома, соответствующего мультииндексу $\alpha$) на фурье-образ функции.* Это свойство позволяет эффективно решать дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. В частности, прямое вычисление преобразования Фурье уравнения (B.90) с учетом свойства (B.94) показывает, что в пространстве фурье-образов это уравнение для случая постоянных коэффициентов $a_\alpha$ становится алгебраическим:

$$L(i\xi)\mathcal{E} = 1,$$

где $L(-i\xi) = L(\partial_\alpha)|_{\partial_\alpha=-i\xi_\alpha}$. Вычисление обратного преобразования Фурье (и отыскание функции Грина) обычно осуществляется переходом на комплексную плоскость [38].

Опуская технические детали, мы рассмотрим здесь лишь результат вычислений для некоторых важных конкретных примеров.

1. **Функция Грина оператора Лапласа** ($n = 3$)**:** $\Delta\mathcal{E}_L(x-\xi) = \delta(x-\xi)$**:**

$$\mathcal{E}_L(x-\xi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\xi|}. \tag{B.95}$$

2. **Функция Грина волнового оператора** ($n = 3$)**:** $\Box\mathcal{E}_W(x-\xi) = \delta(x-\xi)$**:**

$$\mathcal{E}_{W\pm}(x-\xi) = \frac{\theta(\pm x_0-\xi_0)}{2\pi}\delta(c^2(x_0^2-\xi_0^2)-|\vec{x}-\vec{\xi}|^2), \tag{B.96}$$

где $\mathcal{E}_{W-}$ — запаздывающая (причинная функция Грина), $\mathcal{E}_{W+}$ — опережающая (антипричинная) функция Грина,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

— ступенчатая функция Хевисайда.

С учетом свойства (B.85) $\delta$-функцию в (B.96) можно переписать в виде:

$$\delta(c^2(x_0^2-\xi_0^2)-|\vec{x}-\vec{\xi}|^2) = \frac{\delta(c(t_0-\xi_0)-|\vec{x}-\vec{\xi}|)+\delta(c(t_0-\xi_0)+|\vec{x}-\vec{\xi}|)}{2|\vec{x}-\vec{\xi}|} \tag{B.97}$$

$$= 2\pi(\mathcal{E}_{W-}+\mathcal{E}_{W+}).$$

Отметим, что в нестационарных задачах теории поля используются причинные функции Грина, которые дают решения, согласующиеся с картиной упорядочения причины (источника) и следствия (полевого возмущения) во времени. С учетом (B.97) запаздывающую функцию Грина из (B.96) можно записать как:

$$\mathcal{E}_{W_-}(x-\xi) = \frac{\delta((t-\tau)-|\vec{x}-\vec{\xi}|/c)}{c|\vec{x}-\vec{\xi}|}. \tag{B.98}$$

# C. Теория относительности

Теория Фоккера-Тетроде существенным образом опирается на релятивистские свойства пространства, времени и взаимодействий, которые вскрыла в начале XX века специальная теория относительности [39]. Основная идея теории относительности заключается в отказе от абсолютного времени и абсолютного пространства ньютоновской физики. Вместо них в качестве арены для физических событий выступает единое *4-мерное пространство-время Минковского.* При этом пространственные и временные отношения между событиями объединяются друг с другом в рамках 4-мерной псевдоевклидовой геометрии, основным инвариантным объектом которой является квадрат 4-мерного интервала:

$$s^2 = c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2. \tag{C.99}$$

Три координаты 4-мерного мира Минковского $x, y, z$ — это обычные пространственные декартовы координаты, а четвертая — временная координата $ct$. Несмотря на очевидное для всех нас отличие временной протяженности от пространственной, формула (C.99) говорит нам о том, что с точки зрения новой геометрии, приспособленной для правильного описания и истолкования наблюдаемых физических явлений, между пространственными и временными координатами нет резкой разницы и четкой границы. В этом отношении ситуация аналогична евклидовой геометрии с 3-мерным интервалом

$$l^2 = (x_1 - x_2)_1^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \tag{C.100}$$

остающимся неизменным при вращениях и параллельных переносах системы координат: никому не придет в голову сказать, что координата $x$ чем-то выделена по отношению к координате $y$. Напротив, при вращениях системы координат координата $x$ может поменяться местами с координатой $y$ и наоборот. С другой стороны, в целом выражение (C.100) остается неизменным относительно вращений системы координат и ее сдвигов, поскольку выражает длину отрезка, соединяющего пару точек в 3-мерном пространстве. Аналогично, формула (C.99) выражает инвариантную длину между парой событий 1 и 2 (события — это совокупности пространственных положений и моментов времени) в 4-мерном пространстве-времени.

Переход от геометрии с интервалом (C.100) к геометрии с интервалом (C.99) повлек за собой кардинальный пересмотр большей части понятий и законов классической физики Ньютона.

## C.1. Преобразования Лоренца

Анализ элементарного электромагнитного процесса — распространения фронта светового сигнала, испущенного мгновенным точечным источником света, обнаруживает нарушение принципа относительности Галилея с его правилами перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$x' = x - Vt; \quad t' = t; \quad v' = v - V, \tag{C.101}$$

где $V$ — скорость движения системы отсчета $S'$ относительно $S$, ориентированная вдоль их общей оси, $v$ — скорость частицы в системе $S$, $v'$ — скорость частицы в системе $S'$ (см. рис. 3.1-3.2).

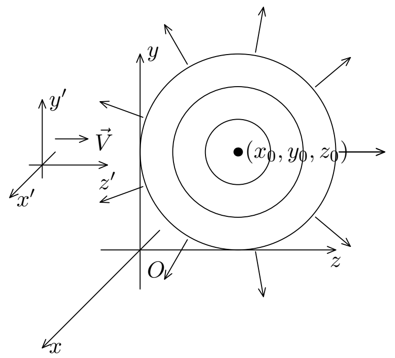



Рис. 3.1. Семейство волновых фронтов точечного источника в системе его покоя.

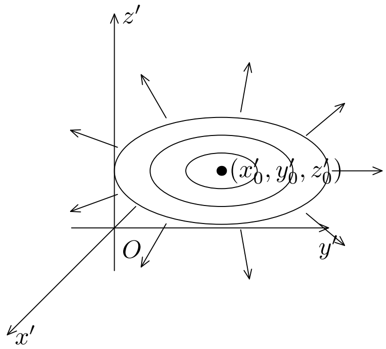



Рис. 3.2. Семейство волновых фронтов точечного источника в некоторой движущейся относительно него системе отсчета, рассчитанное в соответствие с галилеевым законом сложения скоростей.

Нетрудно видеть, что уравнение фронта (расширяющаяся со скоростью света сфера) такой волны:

$$c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = 0 \tag{C.102}$$

(покоящийся источник испускает свет в момент времени $t = t_0$ в точке с координатами $(x_0, y_0, z_0)$) изменит свой вид при переходе к движущейся системе отсчета $S'$ по формулам (C.101).

Это означало бы, что наблюдая за фронтом световой волны, можно определить скорость системы отсчета наблюдателя, что противоречит духу принципа относительности. Несмотря на то, что принцип относительности Галилея распространялся только на механические явления, анализ оптических и электромагнитных экспериментов и теории Максвелла настоятельно приводили к мысли о необходимости его расширения на множество всех электромагнитных явлений. Попытка согласования расширенного на все электродинамические явления принципа относительности (*принципа Эйнштейна-Максвелла*) с электродинамикой Максвелла и привела, в конечном счете, к разработке теории относительности. С точки зрения этой теории уравнение (C.102) может быть записано в виде:

$$s^2 = 0, \tag{C.103}$$

где $s^2$ — квадрат релятивистски инвариантного интервала (C.99).

Правда, для обеспечения инвариантности интервала (C.99), а следовательно и уравнения (C.102) фронта световой волны, необходимо отказаться от преобразований (C.101), вытекающих из евклидовых абсолютных свойств времени и пространства, а вместо них использовать их релятивистское обобщение — *преобразования Лоренца*:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \tag{C.104}$$

которые в нерелятивистском пределе $c \to \infty$ переходят в преобразования Галилея (C.101). Таким образом, скорость света в теории относительности выступает не как частная константа, а как фундаментальная постоянная пространства-времени, отвечающая за его неевклидовы (релятивистские) свойства. Выделенная роль этой константы замечательным образом подтверждается релятивистским законом сложения скоростей:

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}, \tag{C.105}$$

из которого, в частности, следует, что во всех системах отсчета скорость света постоянна и равна $c$.

## C.2. 4-мерные векторы и тензоры.

Последовательное воплощение принципа относительности Эйнштейна-Максвелла предполагает, что все фундаментальные уравнения природы должны формулироваться в виде уравнений, инвариантных относительно преобразований (C.104). Этот свойство уравнений иногда называют их *4-мерной ковариантностью.* Требование инвариантности вида уравнений классической механики Ньютона относительно замены одних декартовых систем координат другими (3-мерная ковараинтность) приводит к 3-мерной векторной (или тензорной) формулировке уравнений. Именно векторный характер сил и ускорений и скалярный характер инертной массы в классической механике гарантируют инвариантный характер уравнений ньютоновской механики относительно вращений 3-мерного пространства:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}(x)}{m} \Leftrightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{F}'(x')}{m'}, \tag{C.106}$$

где штрихом отмечены величины, относящиеся к повернутой системе координат. Разумеется $m = m'$, а вот компоненты векторов $\vec{a}$ и $\vec{F}$ изменяются согласованно (с помощью одной и той же ортогональной матрицы) и потому уравнение в целом не изменяет своего вида. В 4-мерном мире ситуация геометрически вполне аналогична, поэтому 4-мерная ковариантность законов будет автоматически обеспечена, если мы будем записывать эти уравнения в терминах 4-мерных векторов или тензоров. Так, уравнение (C.106) обладает 3-мерной ковариантностью, но 4-мерно нековариантно. С точки зрения 4-мерного мира Минковского оно является (приближенной) проекцией 4-мерного ковариантного уравнения на 3-мерное пространство.

Сформулируем общее правило: *явно 4-мерно ковариантный вид уравнений и соотношений подразумевает запись уравнений на языке 4-мерных векторов (или тензоров) и 4-мерных операций между ними: суммы 4-векторов, 4-мерного скалярного произведения и т.д.* Последнее, кстати, определяется формулой:

$$A \cdot B = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3, \tag{C.107}$$

для всякой пары 4-векторов $A$ и $B$, где расстановка знаков согласована с видом 4-мерного интервала (C.99). Заметим, что иногда такое скалярное произведение записывают с плюсами, но у одного из сомножителей переносят индекс сверху вниз:

$$A \cdot B = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A^\alpha B_\alpha. \tag{C.108}$$

При этом вектор с компонентами $B_\alpha$ имеет координатное представление: $(B^0, -B^1, -B^2, -B^3)$ и называется *ковариантным вектором,* в отличие от вектора с компонентами $B^\alpha$, который называется *контравариантным вектором.* К примеру, 4-мерный радиус-вектор $R = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ имеет, по определению, контравариантный вид, но его можно перевести в ковариантный вид, изменив знаки пространственной части компонент. Далее нам встретятся векторные объекты, имеющие по определению ковариантную природу, но их перевод в контравариантный вид выполняется по тому же правилу.

## C.3. Мировые линии и их характеристики

Рассмотрим вкратце кинематику и динамику частиц в специальной теории относительности. Всякая частица вычерчивает в 4-мерном пространстве-времени *мировую линию* — кривую, изображающую график ее движения в некоторой 4-мерной системе координат. Мировая линия является 4-мерным аналогом 3-мерной траектории частицы. В качестве координаты на мировой линии можно выбрать время $t$. В этом случае параметрическое уравнение мировой линии будет иметь вид:

$$x^0 = ct; \quad x^1 = x^1(t); \quad x^2 = x^2(t); \quad x^3 = x^3(t),$$

где $x^1(t), x^2(t), x^3(t)$ — некоторые функции, задающие конкретный закон движения. Такая параметризация, однако, неудобна для ковариантной формулировки уравнений, поскольку время преобразуется при смене системы отсчета по второй формуле из (С.104). Для перехода к инвариантной параметризации вычислим релятивистский 4-мерный интервал между двумя близкими точками на мировой линии. Подставляя параметрические уравнения в формулу (С.99) и переходя к дифференциалам, получаем:

$$ds^2 = (1 - \frac{v^2}{c^2})c^2dt^2, \tag{С.109}$$

где $v^2 = (\dot{x}^1(t))^2 + (\dot{x}^2(t))^2 + (\dot{x}^3(t))^2$ — квадрат координатной скорости. В теории относительности показывается, что никакое тело конечной массы не может за счет действия какой-либо силы приобрести за конечное время скорость света или скорость большую нее. При условии $v < c$ из формулы (С.109) следует, что интервал $s$ является монотонной функцией времени, следовательно его можно выбрать в качестве нового параметра на мировой линии. Новая параметризация:

$$x^0 = x^0(s); \quad x^1 = x^1(s); \quad x^2 = x^2(s); \quad x^3 = x^3(s) \tag{С.110}$$

будет уже релятивистски инвариантной. Физический смысл интервала $ds$ на мировой линии частицы легко установить, если перейти в систему отсчета, мгновенно сопутствующую частице, т.е. такую, относительно которой частица в данный момент времени покоится. Если $\tau$ — время в этой системе, называемое мгновенным *собственным временем частицы* то из формулы (С.109) следует, что $ds = cd\tau$, т.е. *интервал между парой близких событий пропорционален промежутку собственного времени между этими событиями.* Такое время покажут часы, закрепленные на самой частице и движущиеся вместе с ней. Интегрируя последнюю формулу, приходим к тому же выводу для конечных приращений интервала и собственного времени. Собственное время — важная характеристика мировой линии. В частности, оказывается, что 4-мерно ковариантное выражение для действия свободной частицы в пространстве-времени Минковского пропорционально собственному времени[12]:

$$\mathcal{A}_0 = -mc\int\limits_{s_1}^{s_2} ds = -mc\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt. \tag{C.111}$$

В нерелятивистском пределе $c \to \infty$ это выражение (с точностью до бесконечного постоянного слагаемого) переходит в нерелятивистское действие свободной частицы (ф-ла (A.65) при $U = 0$). Разумеется, как и в нерелятивистском случае, условие экстремума $\delta\mathcal{A}_0 = 0$ обеспечивается прямолинейным равномерным движением $\vec{v} = \mathrm{const}$.

Рассмотрим 4-вектор $\mathfrak{u}$ с компонентами:

$$\mathfrak{u}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \tag{C.112}$$

который получается дифференцированием закона движения (C.110) по параметру $s$. По аналогии с 3-мерной кинематикой, этот вектор является касательным к мировой линии и, в определенном смысле, определяет быстроту движения по ней. По этой причине этот вектор называют *4-скоростью.* С помощью соотношения (C.109) нетрудно получить его явное и более наглядное представление в компонентах:

$$\mathfrak{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \tag{C.113}$$

В отличие от обычной 3-мерной скорости этот вектор безразмерен (скорость в нем выражена в единицах $c$) и удовлетворяет важному условию 4-мерной нормировки:

$$\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u} = (\mathfrak{u}^0)^2 - (\mathfrak{u}^1)^2 - (\mathfrak{u}^2)^2 - (\mathfrak{u}^3)^2 = 1, \tag{C.114}$$

которое выполняется тождественно в силу определения (C.112) или явного вида (C.113) вектора $\mathfrak{u}$.

[12]Во избежание недоразумений мы на протяжении всей статьи под массой частицы будем понимать ее массу покоя.

Именно вектор 4-скорости является 4-мерным ковариантным обобщением 3-мерного вектора скорости $\vec{v}$. При этом, его направление в каждой точке мировой линии частицы определяет направление ее собственного времени в 4-мерном пространстве-времени (см. рис. 3.3).

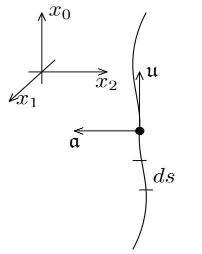



Рис. 3.3. Мировая линия и ее характеристики.

Рассмотрим далее 4-вектор, компоненты которого представляют производные компонент 4-скорости по параметру $s$:

$$\mathfrak{a}^{\alpha} = \frac{d\mathfrak{u}^{\alpha}}{ds}. \tag{C.115}$$

Этот вектор характеризует быстроту изменения 4-скорости вдоль мировой линии и называется *4-ускорением.* Вектор 4-ускорения имеет размерность обратной длины и с дифференциально-геометрической точки зрения характеризует кривизну $k = 1/R$ мировой линии в 4-мерном пространстве-времени, где $R$ — радиус кривизны. Таким образом, 4-вектор ускорения всегда имеет смысл "центростремительного ускорения" в 4-мерном мире. В этом можно убедиться, дифференцируя по $s$ соотношение нормировки (C.114)

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{a}^0\mathfrak{u}^0 - \mathfrak{a}^1\mathfrak{u}^1 - \mathfrak{a}^2\mathfrak{u}^2 - \mathfrak{a}^3\mathfrak{u}^3 = 0, \tag{C.116}$$

т.е. вектор 4-ускорения всегда ортогонален вектору 4-скорости, а потому является пространственным по отношению к направлению собственного времени частицы в каждой точке ее мировой линии.

Кинематика протяженного (неточечного) тела в СТО требует более серьезного математического аппарата и здесь обсуждаться не будет.

## C.4. Причинная структура пространства-времени

Выше мы отметили, что в теории относительности разница между временными и пространственными координатами становится условной. Уточним это утверждение. Зафиксируем точку в пространстве-времени, которую всегда можно принять за начало 4-мерной декартовой системы координат. Рассмотрим произвольную точку с радиус-вектором $\mathfrak{r} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ относительно выбранного начала. Квадрат 4-мерного интервала между рассматриваемой парой точек можно записать как 4-мерный скалярный квадрат:

$$s^2 = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \qquad \text{(C.117)}$$

Характерной и важной для физики особенностью 4-мерной геометрии является нарушение свойства евклидовости скалярного произведения: величина $s^2$ может иметь любой знак и обращаться в нуль даже если $\mathfrak{r} \neq 0$. Действительно, как мы видели выше уравнение фронта световой волны (C.102) имеет вид (C.103) — обращения в нуль квадрата 4-мерного интервала. В рассматриваемой нами ситуации с парой точек, мы можем заключить, что *если радиус-вектор* $\mathfrak{r}$ *некоторой точки пространства-времени удовлетворяет условию* $s^2 = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = 0$, *то начало системы координат и эта точка, рассматриваемые как события, (могут быть) связаны световым сигналом.* Другими словами, фронт световой вспышки, испущенной в начальной точке, захватывает в пространстве-времени все точки с радиус-векторами $\mathfrak{r}$, удовлетворяющими уравнению $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = 0$. Геометрически это уравнение описывает 3-мерный конус $\mathcal{C}^O$. Его проекция на 3-мерное пространство время показана на рис. 3.4.

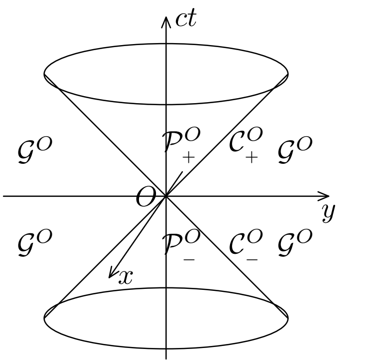



Рис. 3.4. Световой конус $\mathcal{C}_O$ — множество событий в 4-мерном мире, связанных с точкой-событием $O$ световым сигналом.

Рассмотрим точки снаружи светового конуса. Нетрудно убедиться, что радиус-вектор $\mathfrak{r}$ любой из таких точек удовлетворяет неравенству:

$$s^2 = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} < 0 \quad \text{или} \quad t^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{c^2}. \qquad \text{(C.118)}$$

Вторую форму этого неравенства можно интерпретировать так: *промежуток времени, который разделяет событие* $\mathfrak{r}$ *с началом, меньше времени, необходимого световому сигналу для того, чтобы преодолеть пространственное расстояние, разделяющее эти события.* Поскольку скорость света — максимально возможная скорость передачи информации и сигналов, мы приходим к заключению, что *внешность светового конуса* $\mathcal{G}^O$ *— это область событий, причинно не связанных с событием* $O$.

Наконец, радиус-вектор любой точки внутри конуса удовлетворяет обратному неравенству:

$$s^2 = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r} > 0 \quad \text{или} \quad t^2 > \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{c^2}. \tag{C.119}$$

Его вторая форма говорит о том, что промежуток времени, разделяющий события $O$ и $\mathfrak{r}$ достаточен для того, чтобы свет успел преодолеть пространственное расстояние, которое их разделяет. Следовательно, *внутренность* $\mathcal{P}^O_\pm$ *светового конуса представляет собой множество событий, которые, в принципе, могут быть причинно связанными с событием* $O$. При этом, как нетрудно понять с позиций обычных представлений о причинности, нижний конус $\mathcal{C}^O_-$ — он называется *конусом прошлого точки* $O$ — и его внутренность $\mathcal{P}^O_-$ состоят из событий, которые *могут повлиять на* $O$, а верхний конус $\mathcal{C}^O_+$ — он называется *конусом будущего события* $O$ — и его внутренность $\mathcal{P}^O_+$ состоят из событий, на которые *может влиять само событие* $O$. Итак, каждая точка $O$ пространства-времени $\mathcal{M}$, определяет его разбиение на пять подмножеств:

$$\mathcal{M} = \mathcal{C}^O_- \cup \mathcal{C}^O_+ \cup \mathcal{P}^O_- \cup \mathcal{P}^O_+ \cup \mathcal{G}^O \cup O. \tag{C.120}$$

Интересно, что такое разбиение инвариантно относительно смены системы отсчета по формулам преобразований Лоренца (C.104), т.е. каждая компонента в целом переходит в себя, хотя отдельные точки-события внутри компоненты могут переходить друг в друга. Таким образом, 4-мерный интервал (точнее говоря, его знак) определяет инвариантное разбиение пространства времени на причинные компоненты или, как иногда говорят, задает *причинную структуру пространства-времени.*

## C.5. 4-мерная теорема Гаусса-Остроградского

В приложениях теории относительности часто приходится иметь дело с интегралами вида:

$$I_\alpha = \int\limits_{V_\Sigma} \frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha}\, d^4x. \tag{C.121}$$

Здесь $V_\Sigma \subset \mathcal{M}$ — область 4-мерного пространства-времени, ограниченная 3-поверхностью $\Sigma$, $\Omega$ — некоторая физическая или геометрическая величина (4-скаляр, 4-вектор или 4-тензор). Для интеграла $I_\alpha$ имеет место равенство, имеющее смысл, аналогичный 3-мерной теореме Гаусса-Остроградского:

$$I_\alpha = \int\limits_{V_\Sigma} \frac{\partial \Omega}{\partial x^\alpha}\, d^4x = \oint\limits_{\Sigma} \Omega\, d\Sigma_\alpha, \tag{C.122}$$

где интегрирование производится по граничной поверхности $\Sigma$, а элемент интегрирования $d\Sigma_\alpha$ представляет собой $\alpha$-компоненту 4-вектора $d\Sigma$ элемента поверхности $\Sigma$ в каждой ее точке (см. рис. 3.5).

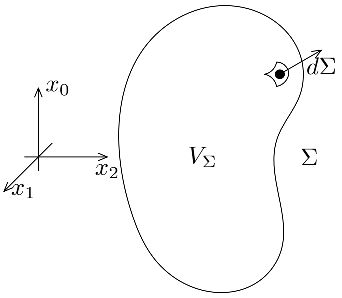



Рис. 3.5. 4-мерная область интегрирования, ее граница и 4-вектор нормали.

По аналогии с 3-мерным случаем, 4-вектор $d\Sigma$ направлен по нормали к каждой точке поверхности $\Sigma$, а по абсолютной величине равен объему элемента поверхности (напомним, что поверхность, ограничивающая 4-мерный объем в $\mathcal{M}$, имеет 3 измерения и, следовательно, измеряется 3-мерным объемом). В частности, для интеграла от дивергенции 4-вектора $\mathfrak{v}$ имеем следующее выражение:

$$\int\limits_{V_\Sigma} \mathrm{Div}\,\mathfrak{v}\, d^4x = \oint\limits_{\Sigma} \mathfrak{v} \cdot d\Sigma, \tag{C.123}$$

которое часто используется при выводе уравнений движения из релятивистского принципа наименьшего действия.

# D. Электродинамика

## D.1. 4-мерная (ковариантная) формулировка электродинамики Максвелла

Важным шагом на этапе развития теории относительности было открытие 4-мерных ковариантных свойств уравнений Максвелла.

Центральным моментом в этом открытии была догадка о том, что подобно пространству и времени, электрические и магнитные поля по отдельности не обладают абсолютным смыслом: *таким смыслом обладает лишь электромагнитное поле в целом.* Для реализации этой идеи было необходимо найти надлежащий геометрический объект, который содержал бы внутри себя одновременно как компоненты электрического, так и компоненты магнитного полей на равных правах, которые могли бы переходить друг в друга при смене системы отсчета, подобно пространственным и временным координатам 4-вектора. Ясно, что 4-вектор не годится для этой цели, поскольку имеет только четыре компоненты, вместо необходимых шести. Следующим по типу сложности идут 4-мерные тензоры 2-ого ранга. Такие тензоры можно понимать как квадратные $4 \times 4$ массивы компонент (координат), в котором каждая компонента при смене системы координат линейно и однородно преобразуется через компоненты в исходной системе координат. Среди всех тензоров второго ранга выделяются *симметричные тензоры,* компоненты которых удовлетворяют соотношению $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$ и антисимметричные тензоры, определяемые условием $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$. Нетрудно подсчитать, что у симметричного $4\times4$-тензора число независимых компонент равно десяти, а у антисимметричного — шести. Таким образом, 4-мерные антисимметричные тензоры второго ранга являются простейшими кандидатами для релятивистского описания электромагнитного поля. Вспомним теперь, что напряженности электрического и магнитного полей выражаются через скалярный и векторный потенциалы по формулам (A.78). Следующей догадкой была мысль об объединении этих потенциалов в единый ковариантный *4-потенциал* $\mathfrak{A}$ по формулам:

$$\mathfrak{A}_0 = \varphi; \quad \mathfrak{A}_i = -A^i. \tag{D.124}$$

При этом формулы (A.78) можно переписать в следующем виде:

$$\mathfrak{F}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathfrak{A}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{D.125}$$

где $\mathfrak{F}$ — *антисимметричный тензор электромагнитного поля* с компонентами:

$$(\mathfrak{F}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \tag{D.126}$$

$$(\mathfrak{F}^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{D.127}$$

Именно тензор электромагнитного поля является адекватным средством релятивистского описания электромагнитного поля и взаимодействия зарядов и токов на полевом языке.

С помощью тензора электромагнитного поля легко записать одну пару уравнений Максвелла, которая не содержит источников (зарядов и токов), в 4-мерно ковариантном виде:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{D.128}$$

В подробной записи это тензорное уравнение, как нетрудно убедиться с помощью (D.126), дает четыре уравнения (в компонентах) (A.82). С другой стороны, непосредственная подстановка определения (D.125) $\mathfrak{F}$ через 4-потенциал приводит эти уравнения к тождествам, в силу перестановочности операторов частного дифференцирования.

Для ковариантной записи уравнений Максвелла с источниками необходимо отыскать ковариантную форму заряда и тока. Оказывается, как впервые показал Пуанкаре, эта пара величин — 3-мерный скаляр и 3-мерный вектор — объединяются в 4-вектор тока:

$$\mathfrak{J} = \rho_0 c\mathfrak{u}, \tag{D.129}$$

где $\rho_0$ — плотность заряда в системе отсчета, сопутствующей движущемуся заряду. При этом полный заряд оказывается инвариантной величиной (скаляром), не зависящей от выбора системы отсчета. С учетом определения плотности заряда и формул релятивистского сокращения длин и объемов имеем:

$$\rho_0 = \frac{\Delta Q}{\Delta V_0} = \frac{\Delta Q}{\Delta V}\sqrt{1 - v^2/c^2} = \rho\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где $\Delta V$ и $\rho$ — элемент объема и плотность заряда, измеренные в лабораторной системе отсчета, $\vec{v}$ — скорость заряда относительно лабораторной системы отсчета. Отсюда, с учетом вида 4-скорости (C.113) и определения (D.129), имеем выражение для компонент плотности тока:

$$\mathfrak{J} = (c\rho, \rho\vec{v}), \tag{D.130}$$

согласующееся с выражением обычной 3-мерной плотности тока. Нетрудно проверить, что оставшаяся пара уравнений (A.81) получается, если подробно расписать следующее 4-мерно ковариантное выражение:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = -\frac{4\pi}{c}\mathfrak{J}^{\alpha} \tag{D.131}$$

Расписывая левую часть через определение (D.125) и выбирая релятивистски инвариантную калибровку: $\mathrm{Div}\,\mathfrak{J} = 0$, (калибровка Лоренца), уравнение (D.131) можно привести к виду:

$$\Box\mathfrak{A} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{J} \tag{D.132}$$

— релятивистского волнового уравнения с источником. Его решение, с учетом вида (B.98) запаздывающей функции Грина, можно записать в виде:

$$\mathfrak{A}(x) = \int\limits_{R^3} \frac{\mathfrak{J}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\, dV' + \mathfrak{A}_0, \tag{D.133}$$

где $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c, \vec{x}')$, $\mathfrak{A}_0$ — произвольное решение однородного волнового уравнения.

## D.2. Калибровочные преобразования

Непосредственная проверка обнаруживает, что определение (D.125) тензора электромагнитного поля инвариантно относительно следующих преобразований потенциала:

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \mathrm{Grad}\,\chi, \tag{D.134}$$

где Grad — 4-мерный (ковариантный) градиент, $\chi$ — произвольная дифференцируемая функция на $\mathcal{M}$. Другими словами, результаты вычисления тензоров электромагнитных полей по потенциалу $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ совпадают при любом выборе функции $\chi$. В 3-мерных обозначениях калибровочные преобразования имеют более привычный вид:

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}; \quad \vec{A}' = \vec{A} - \operatorname{grad}\chi. \tag{D.135}$$

С физической точки зрения наличие калибровочных преобразований означает, что потенциалы определены неоднозначно. Этой неоднозначностью можно воспользоваться, чтобы упрощать уравнения электродинамики, записанные через потенциалы. В частности, в задачах статики выбор калибровочной функции $\chi = \varphi_0 ct$ приводит к хорошо известному свойству потенциала: *выбор "нуля" потенциала произволен.* Интересный и принципиально важный геометрический смысл калибровочных преобразований стал ясен только после построения квантовой механики.

## D.3. Принцип наименьшего действия для заряженных частиц

4-мерно ковариантное действие для электромагнитного поля имеет вид: $\mathcal{A}_{\rm em} = \mathcal{A}_{\rm f} + \mathcal{A}_{\rm int}$, где

$$\mathcal{A}_{\rm f} = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\,d^4x \tag{D.136}$$

— действие свободного электромагнитного поля (под интегралом стоит "скалярное произведение тензоров" , устроенное по типу выражения (C.108) для векторов, а интегрирование производится по инвариантному элементу 4-объема $d^4x = dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3$),

$$\mathcal{A}_{\rm int} = -\frac{1}{c^2}\int(\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{A})\,d^4x \tag{D.137}$$

— действие взаимодействия электромагнитного поля и зарядов. Для перехода к точечным частицам в последнем слагаемом необходимо выделить из 4-объема $d^4x$ элемент 3-объема $dV$ и проинтегрировать по нему с учетом определения (D.129) и определения заряда, как интеграла от плотности по объему:

$$\int\mathfrak{J}^\alpha dV = c\int\rho_0\mathfrak{u}^\alpha dV = c\int\rho_0\frac{dx^\alpha}{ds}\sqrt{1-v^2/c^2}\,dV_0 =$$

$$qc\frac{dx^\alpha}{dt} = qcv^\alpha.$$

Запишем полное действие для системы частиц $N$ частиц, взаимодействующих посредством электромагнитного поля с учетом (C.111), (D.136), (D.137) и последней формулы:

$$\mathcal{A}_{\rm tot} = -\sum_{i=1}^{N} m_{(i)}c\int ds_{(i)} - \sum_{i=1}^{N}\frac{q_{(i)}}{c}\int \mathfrak{A}_\alpha dx^\alpha - \frac{1}{16\pi c}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\, d^4x. \tag{D.138}$$

В этом выражении интегралы в первых двух слагаемых вычисляются вдоль мировых линий заряженных частиц, а в последнем слагаемом интегрирование производится по области пространства-времени, занятой электромагнитным полем. Варьирование действия (D.138) по компонентам 4-потенциала приводит к уравнениям Максвелла (D.131), а варьирование по координатам частиц приводит к уравнениям движения заряженных частиц в электромагнитном поле. Рассмотрим процедуру вывода последних подробнее. Выделим в действии (D.138) слагаемые, относящиеся к $i$-ой частице, а индекс $i$ в дальнейшем будем опускать. Вариация действия выделенной частицы имеет вид:

$$\delta\mathcal{A}_{\rm tot} = -mc\int \delta ds - \frac{q}{c}\int(\delta\mathfrak{A}_\alpha dx^\alpha + \mathfrak{A}_\alpha \delta dx^\alpha). \tag{D.139}$$

В первом слагаемом учтем, что по определению $ds = \sqrt{d\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{r}}$. Следовательно вариация:

$$\delta ds = \delta\sqrt{d\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{r}} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds}\cdot\delta d\mathfrak{r} = \mathfrak{u}\cdot d\delta\mathfrak{r}, \tag{D.140}$$

где было учтено что операции варьирования и дифференцирования коммутируют. Подставляя (D.140) в интеграл, интегрируя по частям и полагая вариации $\delta\mathfrak{r} = 0$ на концах мировых линий частиц, приходим к слагаемому вида:

$$\int mc\mathfrak{a}\cdot\delta\mathfrak{r}\, ds = \int mc\mathfrak{a}_\alpha \delta x^\alpha\, ds. \tag{D.141}$$

Подинтегральное выражение второго слагаемого в (D.139) распишем следующим образом:

$$\delta\mathfrak{A}_\alpha dx^\alpha + \mathfrak{A}_\alpha\delta dx^\alpha \overset{1}{=} \frac{\partial\mathfrak{A}_\alpha}{\partial x^\beta}\delta x^\beta\, dx^\alpha + \mathfrak{A}_\alpha d\delta x^\alpha \overset{2}{=}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial x^\beta}\delta x^\beta\, dx^\alpha - \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial x^\beta}\delta x^\alpha\, dx^\beta + d(\mathfrak{A}_\alpha \delta x^\alpha) \stackrel{3}{=}$$
$$\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\beta}{\partial x^\alpha}\right)\mathfrak{u}^\alpha \delta x^\beta ds + d(\mathfrak{A}_\alpha \delta x^\alpha) \stackrel{4}{=}$$
$$\mathfrak{F}_{\beta\alpha}\mathfrak{u}^\alpha \delta x^\beta ds + d(\mathfrak{A}_\alpha \delta x^\alpha) \stackrel{5}{=} \mathfrak{F}_{\alpha\beta}\mathfrak{u}^\beta \delta x^\alpha ds + d(\mathfrak{A} \cdot \delta \mathfrak{r}). \qquad \text{(D.142)}$$

В равенстве "1" мы использовали определение полного дифференциала, в "2" — правило дифференцирования Лейбница, в "3" — определение 4-скорости (C.112) и замену индексов суммирования, в "4" — определение тензора электромагнитного поля (D.125), в "5" — еще одну замена индексов суммирования. Подставляя (D.142) в (D.139) и отбрасывая интеграл от полного дифференциала (он выражается через вариации на концах и, следовательно, обращается в нуль), приходим к следующему окончательному выражению для вариации действия:

$$\delta \mathcal{A}_{\text{tot}} = mc \int \mathfrak{a}_\alpha \delta x^\alpha ds - \frac{q}{c}\int \mathfrak{F}_{\alpha\beta}\mathfrak{u}^\beta \delta x^\alpha ds, \qquad \text{(D.143)}$$

откуда, в силу произвольности вариаций $\delta x^\alpha$ получаются ковариантные уравнения заряженной частицы в электромагнитном поле:

$$\mathfrak{a}_\alpha = \frac{q}{mc^2}\mathfrak{F}_{\alpha\beta}\mathfrak{u}^\beta. \qquad \text{(D.144)}$$

Пространственная проекция этого уравнения имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = q(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})), \qquad \text{(D.145)}$$

а временная проекция уравнения (D.144) следует из (D.145) и представляет собой релятивистский вариант теоремы об изменении кинетической энергии во внешнем поле. Это уравнение мы здесь не приводим.

## D.4. Излучение движущихся зарядов

Напомним основные сведения, касающиеся поля излучения заряженной частицы. Отметим, что с каждой заряженной частицей связано статическое кулоновское поле, которое не переносит энергии-импульса в пространстве и, следовательно, никак не связано с излучением. Из принципа относительности Эйнштейна-Максвелла следует, что и равномерно движущийся заряд также не может излучать. Действительно существование потока энергии от заряда на пространственную бесконечность — факт, независящий от выбора инерциальной системы отсчета, а в сопутствующей равномерно движущемуся заряду системе отсчета такой поток отсутствует. Эти общие соображения приводят к выводу, что *излучать могут лишь ускоренно движущиеся заряды.* В общем случае поле излучения довольно сложно зависит от характеристик движения частиц. Замечательным фактом, имеющим важное практическое значение, является относительно простой вид поля на большом расстоянии от системы излучающих частиц. Под "большим расстоянием" $r$ здесь понимаются расстояния, много большие характерной длины волны, которую излучает рассматриваемая система. Если $a$ — характерный размер системы, а $v$ — характерные скорости частиц, то длина волны $\lambda \sim cT \sim ca/v$. Вместе с условием нерелятивистского движения частиц: $v \ll c$, которое мы также будем использовать, имеем систему сильных неравенств, выражающих наши упрощения:

$$\frac{a}{r} \ll \frac{v}{c} \ll 1. \tag{D.146}$$

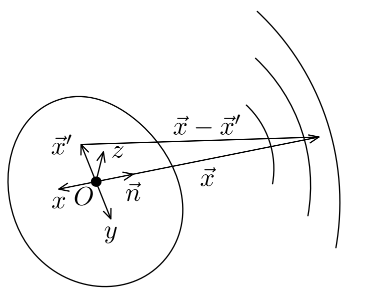


Рис. 4.1. Излучение островной системы в волновой зоне.

Простота рассмотрения поля на больших расстояниях обусловлена, в частности, тем, что волновой фронт в удаленных точках представляет собой сферу большого радиуса, которая в окрестности любой удаленной точки, практически, неотличима от плоскости. Следовательно, излучение в окрестности каждой удаленной точки выглядит как плоская волна с вектором нормали $\vec{n} = \vec{x}/r$ (см. рис. 4.1). Напомним, что в плоской волне векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{n}$ связаны известным соотношением:

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{n}. \tag{D.147}$$

Кроме того, индукцию магнитного поля можно вычислить по формуле[13]:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \times \vec{n}. \tag{D.148}$$

Следовательно, для определения полей вдали от излучающей системы достаточно знать векторный потенциал. Рассмотрим 3-мерную часть выражения (D.133):

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \int\limits_{R^3} \frac{\vec{j}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, dV', \tag{D.149}$$

где как и в (D.133) штрих у плотности тока означает, что она рассматривается в более ранний момент времени $t' = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$. При сделанных выше предположениях этим запаздыванием, равно как и различием в месте положения источников (координатой $\vec{x}'$), можно пренебречь (см. рис. 4.1). Если рассмотреть одну излучающую частицу с нерелятивистским законом движения $\vec{x}(t)$, то, делая замену: $\vec{j}' \, dV' \to q\dot{\vec{x}}$ (переход к дискретному распределению заряда), получаем из (D.149):

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{q\dot{\vec{x}}}{cr}. \tag{D.150}$$

Отсюда, с учетом (D.147) и (D.148) находим поля излучения на большом расстоянии:

$$\vec{B} = \frac{\ddot{\vec{x}} \times \vec{n}}{c^2 r}; \quad \vec{E} = \frac{(\ddot{\vec{x}} \times \vec{n}) \times \vec{n}}{c^2 r}. \tag{D.151}$$

# E. Релятивистская космология

Современная релятивистская космология — это раздел общей теории относительности, в которой пространство-время вселенной рассматривается в целом, вместе со всеми видами материи, находящейся

[13] Пусть $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$, где $\vec{A}_0$ — постоянная амплитуда, $\vec{k} = \omega\vec{n}/c$. Имеем следующую цепочку равенств с оператором $\nabla$:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = (\nabla e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}) \times \vec{A}_0 = -i\vec{k} \times \vec{A} = -(i\omega/c)\vec{n} \times \vec{A} = -(1/c)\vec{n} \times \dot{\vec{A}}.$$

в ней [**?**]. При этом, согласно основному *космологическому принципу* вселенная *однородна* и *изотропна*. Первое свойство означает, что глобальные свойства вселенной не зависят от выбора места в ней. Второе свойство означает, что эти свойства одинаковы во всех направлениях. Следует заметить, что однородность и изотропия начинают проявляться лишь на достаточно больших масштабах (порядка десятков или сотен мегапарсек), в то время как на меньших масштабах вещество вселенной структурируется в звезды, галактики и скопления галактик. Основным геометрическим объектом релятивистской космологии является 4-мерный интервал, обобщающий интервал пространства Минковского (C.99):

$$ds_\sigma^2 = c^2dt^2 - R^2(t)dl_\sigma^2. \tag{E.152}$$

Здесь $R(t)$ — масштабный фактор, ответственный за глобальное космологическое изменение пространственных масштабов, экспериментально открытое Э.Хабблом в 1929г., $dl_\sigma^2$ — квадрат пространственной длины. Индекс $\sigma$ принимает значения $+, -$ или 0 и выражает результат чисто математической теоремы о возможных 3-мерных однородных и изотропных пространствах:

$$\left\{\begin{array}{ll} dl_+^2 = dr^2 + a^2\sin^2(r/a)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) & \text{— замкнутый мир;} \\ dl_-^2 = dr^2 + a^2\sinh^2(r/a)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) & \text{— открытый мир;} \\ dl_0^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) & \text{— плоский мир.} \end{array}\right. \tag{E.153}$$

В формулах (E.153) параметр $a$ — постоянный параметр кривизны пространства. При $a \to \infty$ интервал пространства с положительной и отрицательной кривизной переходят в интервал плоского пространства. Несмотря на кажущуюся выделенность начала сферической системы координат $\{r, \theta, \varphi\}$, которая использована в формулах (E.153), все точки любого из рассматриваемых пространств геометрически равноправны. В частности, во всех точках пространственная кривизна одинакова.

Рассмотрим некоторые чисто геометрические свойства вселенной с интервалом (E.152). Во-первых, пространственный объем вселенной с 3-мерным пространством положительной кривизны конечен. На рис. 5.1 показана одна из возможных интерпретаций пространственного сечения такой вселенной вместе со сферической системой координат. Выделим из (E.152) пространственную часть и будем понимать ее как пространственную теорему Пифагора по аналогии с обычным евклидовым пространством. Тогда элемент пространственного объема примет вид:

$$dV = R(t)\,dr \cdot R(t)a\sin(r/a)\,d\theta \cdot R(t)a\sin(r/a)\sin\theta\,d\varphi =$$

$$R^3(t)a^2\sin^2(r/a)\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi,$$

откуда, интегрируя, находим:

$$V(t) = \int dV = R^3(t)a^2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{\pi a}\sin^2(r/a)\,dr = 2\pi^2a^3R^3(t). \tag{E.154}$$

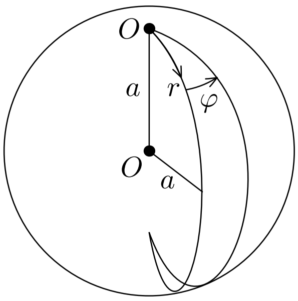



Рис. 5.1. Реализация космологической модели с постоянной положительной пространственной кривизной — 3-мерная сфера, радиус которой изменяется со временем.

Рассмотрим процесс распространения лучей света в рассматриваемой модели вселенной. Для этого поместим источник в начало координат, а направление линии $\theta = 0$ совместим с направлением луча. Уравнение фронта светового луча: $ds^2 = 0$ примет в этом случае вид:

$$c^2dt^2 - R^2(t)dr^2 = 0.$$

Вынося масштабный множитель $R^2(t)$ за скобки и вводя новую временную координату[14] $\tau$ с помощью соотношения:

$$\tau = \int\frac{dt}{R(t)}, \tag{E.155}$$

приходим к простому уравнению лучей вида: $C^2(\tau)(c^2d\tau^2 - dr^2) = 0$, где $C(\tau) = R(t)|_{t=f(\tau)}$, решения которого:

$$r = \pm c(\tau - \tau_0), \tag{E.156}$$

[14]Напомним, что в ОТО временная координата полностью теряет свой абсолютный смысл и мы свободны в ее выборе. Время $t$ в интервале (E.152) называется *мировым*. С его помощью удобно описывать эволюцию пространственных масштабов вселенной. Время $\tau$, введенное в (E.155), называется *конформным*. Его используют для описания распространения световых сигналов в космологических моделях.

где $\tau_0$ — константа интегрирования. Решение со знаком "+" описывает луч, испущенный из начала в момент $\tau_0$, решение со знаком "−" описывает луч, приходящий в начало в момент $\tau_0$. Интересно, что в замкнутой вселенной луч, в принципе, может вернуться в точку наблюдения с противоположной стороны.

В процессе распространения луча его наблюдаемая длина волны будет изменяться из-за космологической эволюции масштабов. Поскольку все пространственные размеры пропорциональны $R(t)$, можем записать основное соотношение:

$$\frac{\lambda}{R(t)} = \text{const} \quad \text{или} \quad \omega(t)R(t) = \text{const}. \tag{E.157}$$

В частности, отсюда следует, что в процессе расширения фотоны "краснеют".

Основной математической проблемой релятивистской космологии является определение масштабного фактора $R(t)$ как функции времени. Отыскание масштабного фактора сводится к решению космологических уравнений Эйнштейна, которых мы здесь не приводим. Основная идея, которую выражают эти уравнения, заключается в обусловленности геометрии пространства-времени находящейся в ней материей. Для однозначного определения $R(t)$ в космологических задачах необходимо задавать связь между плотностью энергии[15] $\varepsilon$ и давлением $p$ вещества вселенной, т.е. зависимость вида $p = p(\varepsilon)$, называемую *уравнением состояния материи.* Так, пылевидная материя задается уравнением состояния $p = 0$, а излучение — уравнением $p = \epsilon/3$. Подавляющее число космологических моделей требует постоянства массы вещества во вселенной, что исключает процессы рождения материи[16] "из ничего."Требование постоянства массы-энергии приводит к соотношению:

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = 0,$$

[15] Эту величину можно представить в виде суммы: $\epsilon = \rho c^2 + w$, где $\rho c^2$ — плотность массы, $w$ — плотность энергии всех видов негравитационного взаимодействия. Для обычного вещества первое слагаемое всегда доминирует.

[16] Закон сохранения энергии в моделях с творением материи "из ничего" удается "спасти", например, за счет предположения, что энергия перетекает в наблюдаемые измерения из дополнительных. В этом случае имеет место закон сохранения полной массы-энергии в многомерном мире.

которое с учетом выражения (E.154) можно привести к виду:

$$\rho \sim R^{-3}. \tag{E.158}$$

Эта зависимость часто используется при описании эволюции нерелятивистского вещества во вселенной.

Рассмотрим теперь процесс космологической эволюции вселенной, заполненной равновесным излучением, считая, что вселенная в целом представляет собой адиабатически изолированную систему. Первое начало термодинамики примет вид:

$$dE + p\,dV = 0.$$

Учитывая, что $E = \epsilon V$ и $p = \epsilon/3$, $\epsilon \sim T^4$ для излучения ($T$ — абсолютная температура), приходим к дифференциальному уравнению:

$$d(T^4 V) + \frac{T^4}{3}\,dV = 0.$$

С учетом того, что $V \sim R^3$, находим его решение:

$$T \sim \frac{1}{R(t)}, \tag{E.159}$$

определяющее закон изменения температуры излучения в эволюционирующей вселенной.

## Литература

[1] Уитеккер Э., *История теории эфира и электричества* М. – Ижевск, РХД, 2001.

[2] Физическая энциклопедия, БСЭ, 2003.

[3] Сивухин Д.В. *Общий курс физики (т.3, Электричество)*, М., Наука, 1996.

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Теоретическая физика (т.2., Теория поля)* М., Наука, 1988.

[5] Логунов А.А., *Лекции по теории относительности и гравитации* М., Наука, 1987.

[6] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., *Фейнмановские лекции по физике (т.3)* М., Мир, 1966.

[7] Нарликар Дж., *Инерция и космология в теории относительности* в сб. *Астрофизика, кванты и теория относительности,* М. Мир, 1982.

[8] Schwarzshild K., Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, **128**, 132 (1903)

[9] Tetrode H., Zs. Phys., **10**, 317 (1922)

[10] Lewis G.N. Nat. Acad. Sci. Proc. **12**, 22 (1926)

[11] Fokker A.D., Zs.Phys., **58**, 386 (1929); Physica., **9**, 33 (1929); Physica., **12**, 145 (1932)

[12] Lorentz H.A., *Collected papers* **II**, pp. 281 and 343.

[13] Dirac P.A.M., *Proc. Roy. Soc. London* **A167** 148 (1938)

[14] Wheeler J.A., Feynman R.P., *Rev. Mod. Physics* **17** p.157-181 (1945)

[15] Wheeler J.A., Feynman R.P., Phys. Rev. **59** 683 (1941)

[16] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., *Фейнмановские лекции по физике (т.5)* М., Мир, 1966.

[17] Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю., *Теория прямого межчастичного взаимодействия* М., Энергоиздат, 1986.

[18] Hogarth J.E., *Proc. Roy. Soc.* **A267** p. 365-383 (1962)

[19] Burman R., *Observatory* **90** 240-9 (1971a); **91** 141-54 (1971b)

[20] Hoyl F., Narlikar J.V. *Proc. Roy. Soc.* **273** p. 1-11 (1964)

[21] Davies P.C.W., *J. Phys. A* **5** 1722-1737 (1972)

[22] Roe P.E. *Mon. Nat. R. Astr. Soc.* **144** 219-30.

[23] M. Trodden, S.M. Caroll *TASI Lectures: Introduction to cosmology* astro-ph/0401547

[24] Partridge R. B., *Nature, Lond.* **244** 263 (1973)

[25] Davies P.C.W., *J. Phys. A* **8** 272-280 (1975)

[26] Heron M.L. and Pegg D.T. *J. Phys. A* **7** 1965-1969 (1973)

[27] С.М.Коротаев и др., *Известия вузов (физика)*, 4, с.26-33 (2007).

[28] Davies P.C.W., *The physics of time asymmetry* Leighton Buzzard, Surrey University Press, London 1974.

[29] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б., *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* М., Наука, 1971.

[30] Driver R.D. *Phys. Rev.* **178** 2051-2057 (1969)

[31] Driver R.D. *Phys. Rev.* D19 1098-1107 (1979)

[32] Жданов В.И., Пирагас К.А. *О круговых орбитах в динамике двух частиц, учитывающей запаздывание взаимодействий* В кн. *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц* Вып. 5, М., Атомиздат, с.65-80, 1974.

[33] Кокарев С.С., *Три лекции о законах Ньютона* Сб. научных трудов РНОЦ "Логос", вып.1, с.45 (2006)

[34] Пуанкаре А., *Наука и гипотеза* В сб. статей *"О науке"* М., Наука, 1991.

[35] Ланцош, *Вариационные принципы механики* М., Мир, 1965.

[36] Эльсгольц Л.Э., *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление* М., Наука, 1960.

[37] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., *Введение в теорию квантованных полей* М., Наука, 1984.

[38] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики* М., Наука, 1981.

[39] Паули В., *Теория относительности* М., Наука, 1991.