Три лекции о законах Ньютона

С.С.Кокарев[1], РНОЦ "Логос" , (Ярославль), Россия

Аннотация

Три небольшие лекции посвящены трем законам Ньютона, лежащим в основе классической механики. В лекциях эти законы анализируются с позиций современных представлений о пространстве, времени и взаимодействиях.

Three lectures on Newton's laws

S.S.Kokarev, RSEC "Logos" , (Yaroslavl), Russia

Abstract

Three small lectures are devoted to three Newton's laws, lying in the foundation of classical mechanics. These laws are analyzed from the viewpoint of our contemporary knowledge about space, time and physical interactions.

1. Принцип инерции Галилея и современная физика

Координатный метод описания физических явлений в своей основе содержит две важные и, на первый взгляд, взаимоисключающие идеи: идею *равноправности всех систем координат* и идею *практического удобства определенной системы координат* при решении конкретной физической задачи. Адекватная этим идеям математическая формулировка — общековариантные уравнения в терминах тензорных расслоений — снимает кажущееся противоречие: инвариантные операции над тензорами (тензорные произведения, свертки, ковариантное дифференцирование) от системы координат не зависят, а их выражения в компонентах могут упрощаться при

[1]logos-center@mail.ru

выборе системы координат, отражающей имеющиеся симметрии. Теория относительности позволяет включить системы отсчета в класс 4-мерных систем координат, поскольку с любой системой отсчета можно связать 4-мерную систему координат, в которой мировые линии тела отсчета совпадают с временными координатными линиями [1]. Как и в случае систем координат, мы могли бы повторить здесь идеи, касающиеся *равноправности всех систем отсчета* и *практического удобства конкретной системы* в той или иной ситуации. В справедливости второй идеи нас убеждают многочисленные примеры классического курса теоретической механики, а вот первая совсем не очевидна в рамках классической механики Ньютона. Более того, *первый закон Ньютона*, который иногда называют *законом инерции*, говорит нам именно о том, что существуют некие особые системы отсчета, называемые *инерциальными*, в которых свободные механические тела движутся прямолинейно и равномерно или покоятся. Как правило, в школьном, да и вузовском курсе механики этому закону уделяется недостойно малое внимание. К сожалению, иногда встречаются и совсем ошибочные его толкования. Между тем, этот закон (или, как мы увидим, лучше сказать, принцип) после его надлежащей переформулировки, неожиданно выступает как общий принцип, практически, всех современных физико-геометрических теорий природы, а не только механики. По этой причине мы рассмотрим его роль в механике подробнее.

Закон инерции Галилея *постулирует* существование инерциальных систем отсчета. Повседневный опыт ничего не может сказать нам о том, как движутся тела в отсутствие воздействия сил или в ситуации, когда силы скомпенсированы по той простой причине, что мы не можем ни изолировать какое-либо тело от окружающего мира, ни скомпенсировать в точности воздействие всех сил (логически не исключено, что какие-то силы нам пока еще совсем неизвестны), ни определить, в точности, *геометрическую прямую* в физическом пространстве. На последнее обстоятельство обратил внимание французский математик А.Пуанкаре в 1909 году [2]. Очевидно, что в такой ситуации закон инерции Галилея **заведомо не может быть проверен экспериментально.** Именно поэтому мы особо подчеркнули постулативный характер этого закона с самого начала.

Но забудем на время про последнюю трудность, связанную с реализацией геометрических прямых. Пусть в нашем распоряжении имеется устройство, которое, не влияя на движение исследуемых нами тел, совершенно четко показывает нам с любой желаемой степенью точности — движется данное тело по прямой или отклоняется от нее. Тогда, если мы удалим все "посторонние" для нашего эксперимента тела, как следует позаботимся о компенсации воздействий оставшихся тел и при этом обнаружим, что тело, за которым мы наблюдаем, движется по прямой *при любой точности наших измерений*, мы придем к красивому выводу об инерциальности нашей системы отсчета и, тем самым, экспериментально "подтвердим" закон инерции Галилея. Такой исход событий, однако, крайне маловероятен. Опыт учит нас, что с повышением точности измерений *всегда* обнаруживаются новые и более тонкие детали физического эксперимента, которые усложняя наблюдаемую ранее картину, часто приводят к новым качественным прорывам в ее понимании (рис. 1.1).

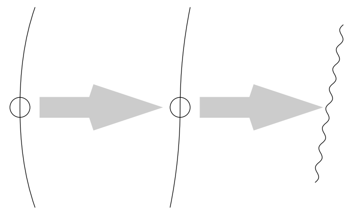

Рис. 1.1. Изменение масштаба детализации траектории как в сторону его уменьшения (левый рисунок), так и в сторону увеличения (правый рисунок), может обнаружить отклонения траектории от прямой.

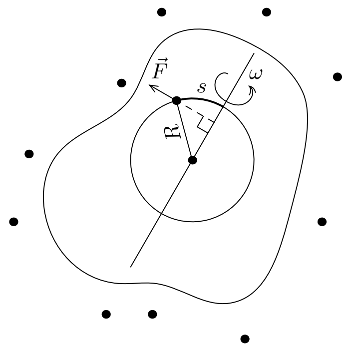

Рис. 1.2. Гипотетическая "фундаментальная сила" природы на планете с непрозрачной атмосферой, на самом деле, есть центробежная сила инерции, связанная с вращением планеты.

Итак, почти достоверно, что наш прибор будет показывать некоторые отклонения от прямой линии. Но тогда закон инерции ставит нас перед альтернативой: либо на тело действуют какие-то силы, искривляющие траекторию, природа которых нам быть может не ясна, либо наша система отсчета неинерциальна. **Сделать выбор между этими двумя альтернативами совсем не просто!** Представим себе планету, пишет Пуанкаре, которая вращаясь относительно неподвижных звезд, имеет непрозрачную для звездного света атмосферу (рис. 1.2).

Физики этой планеты не могут видеть своего вращения относительно звезд и связанной с ним неинерциальности и потому, проводя кропотливые эксперименты, держат в голове первую из предложенных альтернатив. Исследуя движения различных тел, они могли бы, в конце концов, прийти к выводу о том, что отклонения пробных тел от прямой свидетельствует о существовании некой силы, которая обращается в нуль в двух точках — "полюсах отталкивания" — на поверхности, растет пропорционально $R\sin(s/R)$, где s — удаление от этих точек на поверхности планеты, R — радиус планеты; направлена эта сила всегда под углом $\pi/2 - s/R$ к вертикали и пропорциональна массе тела. Общая формула:

$$|\vec{F}| = \alpha m R \sin(s/R) \tag{1.1}$$

должна будет иметь для жителей этой планеты такой же фундаментальный смысл, как закон всемирного тяготения, а постоянная α, которую можно было бы определить экспериментально, имела бы характер фундаментальной константы природы. Так продолжалось бы до тех пор, пока инопланетного Коперника, знакомого, правда, с законом инерции инопланетного Галилея, не осенит гениальная догадка: "А что, если нет никакой силы $\vec{F}$, а просто система отсчета, связанная с нашей планетой неинерциальна? Если сделать самое простое предположение о том, что планета вращается вокруг оси, проходящей через "полюса отталкивания" с постоянной угловой скоростью ω, то выражение для $\vec{F}$ приобретает простой и ясный физический смысл: это есть обычная центробежная сила инерции, которая наблюдается жителями планеты в повседневном опыте, но в гораздо меньших масштабах. Тогда формулу (1.1) следует переписать так:

$$|\vec{F}| = m\omega^2 r, \tag{1.2}$$

где r — расстояние от точки поверхности до оси вращения[2]. А "фундаментальная постоянная природы" α имеет смысл квадрата угловой

[2] В формуле (1.1) это расстояние выражено через расстояние до "полюса отталкивания" на сферической поверхности. Дело в том, что жителям планеты с постоянно закрытым звездным небом пользоваться системой параллелей и меридианов становится неудобным. А вот расстояния вдоль поверхности — вполне удобная для них координата.

скорости вращения поверхности относительно каких-то невидимых внешних и более массивных тел". Примерно так мог бы рассуждать инопланетный Коперник. И, скорее всего, по известным нам причинам, остался бы не понятым своими соседями по планете.

Разобранный нами пример Пуанкаре характеризует общий ход мысли исследователей, взявшихся за экспериментальную проверку закона инерции Галилея. В объяснении отклонений от прямой сначала ситуация будет излагаться на силовом языке, затем, если это удастся, эта же ситуация будет перетолковываться на язык неинерциальных систем отсчета. И то и другое допускается первым законом Ньютона. Но что лучше? Или, точнее, что правильнее? Чтобы ответить на этот вопрос подведем некоторые итоги. Что дает обсуждаемая нами смена точки зрения на порядок вещей — от сил к неинерциальности? Во-первых, при такой смене мы исключаем "лишние силы природы": в примере с планетой сила $\vec{F}$, после открытия инопланетного Коперника, "перекочевывает" из динамики в кинематику. Во-вторых, описание внешних движений в открытой неинерциальной системе отсчета существенно упрощается![3] И это не просто дань отвлеченным принципам красоты и простоты, которые философски настроенный ум может сформулировать и без научного опыта. Совсем не случаен тот исторический факт, что **только после открытия Коперника Ньютон сумел в простых эллиптических траекториях планет солнечной системы усмотреть очень простой и фундаментальный закон природы — закон всемирного тяготения.** Усмотреть его действие в неисчислимых эпициклах Птолемея — задача непосильная для человеческого ума. Но и самые современные компьютеры пока не обладают интеллектом, способным к индуктивному обобщению и, тем более, к чувствам простого и прекрасного!

Теперь становится ясно, что закон инерции не есть закон в обычном смысле. Он ничего не утверждает нам о действительном мире, который пытается описать классическая механика Ньютона. Он предлагает нам лишь некоторое простое правило мышления о нем. Фактически, он предлагает нам **принять на веру, что в некоторых специальных системах отсчета, называемых инерциальны-**

[3]К сожалению, для жителей нашей сумеречной планеты это не очень веский аргумент. Ведь у них нет никакой картины движения небесных тел! Аргумент станет существенным, когда на планете появится космонавтика.

ми, самой простой ситуации — свободному движению тел — должны соответствовать самые простые траектории — прямые. Это — исходное положение всей классической механики. Описанную простую ситуацию *могут нарушать* либо силы, либо неинерциальные движения. Выбор может быть сделан только после анализа ситуации в целом: какие силы уже известны, есть ли основания полагать, что существуют еще какие-то, выглядит ли движение внешних тел проще, после перехода на неинерциальную точку зрения.

Все вышесказанное означает, что, несмотря на свой особый статус, **закон инерции является, пожалуй, самым фундаментальным звеном всей логической структуры классической механики.** В связи с этим, хочется подчеркнуть ошибочность утверждения некоторых авторов о том, что первый закон Ньютона является следствием второго. Рассуждение выглядит примерно так. Рассмотрим частный случай второго закона:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{F}/m, \tag{1.3}$$

когда $\vec{F} = 0$. Тогда тело движется с нулевым ускорением по прямой в полном соответствии с законом инерции. Ошибочность данного рассуждения заключается в том, что приведенная нами форма второго закона Ньютона справедлива только в инерциальных системах отсчета, существование которых постулируется первым законом. **Если бы не было первого закона Ньютона (или он имел бы другую формулировку), то второй закон Ньютона нельзя было бы каким-либо определенным образом даже записать (или он мог бы иметь совсем другой вид)!** Ведь мы не знали бы тогда, что уравнение движения свободного тела имеет вид: $\ddot{\vec{r}} = 0$, т.е. вид уравнения прямой!

Рассмотрим в качестве примера слегка "модифицированный" мир, в котором закон инерции звучал бы так: "Существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, в которых тела в отсутствие действия других сил или в случае их взаимной компенсации, движутся по параболам, у которых векторный коэффициент при квадрате времени постоянен для всех тел". В этом случае, второй закон Ньютона, будет иметь вид: $\ddot{\vec{r}} - \vec{g} = \vec{F}/m$, где $\vec{g}$ — постоянный вектор, задающий направление осей всех парабол. Тогда в отсутствие сил имеем: $\ddot{\vec{r}} - \vec{g} = 0$ — т.е. именно движение по параболам (рис. 1.3).

Если "узнать" в векторе $\vec{g}$ ускорение свободного падения на поверхности Земли, то наш "модифицированный" мир оказался бы тождественным миру классической механики Ньютона вблизи поверхности Земли, причем все особенности движения падающих тел описывались бы вообще без всяких сил! Что же произошло? Модифицируя механику Ньютона, мы "перетащили" одну из сил из динамики в кинематику свободных тел, точнее — в форму их траекторий. Вблизи Земли такая механика была бы даже удобнее! Вместо парабол можно было бы постулировать и другие кривые — при этом новые силы перешли бы из динамики в кинематику свободных тел. Ньютон при построении своей, привычной нам, классической механики, пошел самым кардинальным путем: **кинематика свободных тел механики Ньютона максимально проста, а силовая динамика, наоборот, — максимально богата!** В этом смысле, механика в ньютоновской формулировке, наиболее проста.

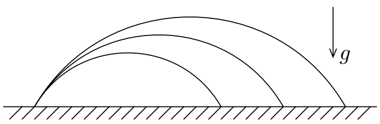

Рис. 1.3. Траектории свободных частиц в мире с модифицированным законом инерции Галилея. В этом мире вблизи поверхности Земли нет силы тяжести. По мере отдаления от поверхности сила тяжести появляется и растет, приближаясь на больших расстояниях к постоянной величине, равной $-m\vec{g}$.

Есть и другой крайний полюс этой простоты: мы могли бы попытаться, наоборот, всю силовую динамику перевести в кинематику свободных тел. Для сил гравитации эта задача решена в *общей теории относительности* [3], для других взаимодействий она более или менее успешно решается в рамках *калибровочной концепции взаимодействий* [4]. В обоих случаях искривление траекторий получается не за счет действия сил, а как следствие неевклидовости геометрии физического пространства-времени, которое, кроме того, может иметь дополнительные измерения [5]. Такой "антиньютоновский" подход, активно развивающийся в современных физических теориях, получил название *проблемы геометризации физических взаимодействий* [6].

Покажем в заключение, что имеется и квантово-механический аналог закона инерции Галилея. Напомним, что в нерелятивистской квантовой механике мы имеем дело с *состояниями* $|t\rangle$ — векторами некоторого гильбертова пространства и *наблюдаемыми* — эрмитовыми операторами, действующими в нем [7]. Основное уравнение нерелятивисткой квантовой механики:

$$i\hbar|\dot{t}\rangle = \hat{\mathcal{H}}|t\rangle \tag{1.4}$$

— *уравнение Шредингера,* является квантово-механическим аналогом уравнения ньютоновской динамики[4] (1.3). В (1.4) оператор $\hat{\mathcal{H}}$ — *дифференциальный оператор эволюции* или, коротко, *гамильтониан.* Переход к более привычной волновой функции $\psi(\vec{r}, t)$ аналогичен выбору системы координат в классической механике Ньютона и переходу от векторов к их проекциям. В квантовой теории эта процедура называется переходом к *определенному представлению* гильбертова пространства и операторов в нем. Обычные волновые функции получаются переходом к $\vec{r}$*-представлению*: $\psi(\vec{r}, t) \equiv \langle\vec{r}|t\rangle$. Квантово-механический закон инерции теперь можно сформулировать так: **"Существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, в которых состояние свободной квантовой частицы массы m и импульсом $\vec{p}$ в координатном представлении описывается волновой функцией, пропорциональной $\exp[(\varepsilon t - \vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar]$, где $\vec{p}$ и ε связаны стандартным соотношением: $\varepsilon = \vec{p}^{\,2}/2m$".** Именно это утверждение позволяет конкретизировать вид гамильтониана: $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{T}} + \hat{\mathcal{U}}$. При этом, можно доказать, что в классе дифференциальных операторов второго порядка, сформулированный нами квантово-механический закон инерции приводит к единственному стандартному выражению:

$$\hat{\mathcal{T}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2,$$

а состояния, описываемые плоскими волнами, таким образом, выступают (в координатном представлении квантовой механики) квантово-механическими аналогами прямолинейных равномерных движений тел классической механики Ньютона.

2. Два взгляда на второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона утверждает, что в инерциальных системах отсчета причиной изменения скорости тела являются внешние силы,

[4]Более явно эта аналогия выступает в известной теореме Эренфеста для средних значений классических динамических величин.

действующие на него[5]. В задачу динамики входит выяснение свойств сил природы и решение задачи о движении тела под действием заданных сил. В векторном виде уравнение движения точечного тела имеет вид (1.3). Снова зададимся вопросом о его экспериментальной проверке. Условный характер понятия силы мы уже обсудили в предыдущем параграфе: в зависимости от формулировки первого закона Ньютона часть сил может "растворяться" в кинематике или, наоборот, "кристаллизоваться" в динамике. Предположим теперь, что мы принимаем традиционную ньютоновскую формулировку закона инерции Галилея. Экспериментальная проверка второго закона Ньютона подразумевает возможность **одновременного независимого измерения всех трех величин** $\vec{a}$, $\vec{F}$, m, входящих в выражение (1.3) в течение времени эксперимента, их подстановку в выражение (1.3) и проверку его тождественного выполнения на заданном уровне точности измерений. При этом следует помнить, что на опыте все наши количественные измерения в экспериментах любого типа всегда связаны только с измерением длин или целым счетом во времени[6].

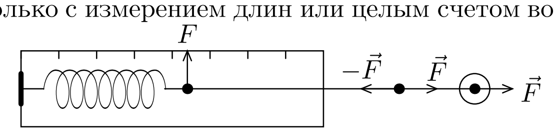

Рис. 2.1. Работа динамометра основана на калибровочной зависимости (как правило, линейной) и третьем законе Ньютона.

Поэтому, если отвлечься от трудностей, связанных с измерением производных как пределов конечных отношений, непосредственно опытным путем можно измерить только ускорение. Как же мы измеряем

[5]Здесь и далее мы будем полагать, что масса тела в процессе его движения остается постоянной. Случай движения тел с переменной массой (например, реактивное движение) всегда можно свести к движению тел с постоянной массой, если представлять механическую систему состоящей из подсистем, суммарная масса которых остается постоянной.

[6]Действительно, кроме измерения длин с помощью линейки, мы с помощью специальных линеек, называемых циферблатом часов или шкалами мультиметра, манометра, термометра измеряем также и промежутки времени, напряжение, силу тока, давление, температуру и т.д. Измерение времени путем подсчета колебаний маятника представляет собой пример второго типа количественных измерений с помощью целого счета. В его современных модификациях – электронных часах или пересчетном устройстве электрических импульсов делается то же самое с помощью специальных электронных схем. Несложный анализ показывает, что в основе работы всех остальных измерительных устройств также лежат пространственные шкалы или целый счет.

силу и массу? Традиционно силу измеряют динамометром. Но работа любого динамометра основана, кроме специфической для его типа калибровочной зависимости, на условии равновесия тел и третьем законе Ньютона (рис. 2.1): если данное тело, соединенное с динамометром находится в механическом равновесии, то сила, приложенная со стороны динамометра, уравновешивает измеряемую силу, приложенную к телу со стороны внешних тел. По третьему закону Ньютона с такой же силой само тело действует на динамометр и стрелка на его шкале показывает в равновесии именно внешнюю силу. Но для независимой экспериментальной проверки третьего закона нам уже необходимо иметь способ измерения сил. Получается замкнутый логический круг. В некоторых учебниках для доказательства справедливости третьего закона используется эксперимент с двумя массами на нити, вращающимися вокруг общего центра масс: отношение центростремительных ускорений грузов обратно пропорционально отношению их масс, следовательно произведение $m\vec{a}$ для любой пары взаимодействующих тел по модулю одно и тоже. В наших рассуждениях такое "доказательство" не пройдет, поскольку оно опирается на второй закон Ньютона, который мы и пытаемся проверить. Другой способ "измерять" силу заключается в измерении массы и ускорения. Но тогда уравнение (1.3) есть просто определение силы. Кроме всего прочего, несложный анализ показывает, что любой способ определения массы также будет опираться на второй и третий законы Ньютона (например, вращение на нити или взвешивание).

Итак, с позиций логики "экспериментальная" проверка второго закона Ньютона всегда будет содержать в себе логический круг. Для практических задач это не очень существенно: аксиоматика Ньютона непротиворечива и дает возможность ставить и решать множество задач. При этом силы и массы, всякий раз, остаются как бы за кадром наблюдений: наблюдаются движения и траектории. Отклонения от предсказываемых на основе второго закона траекторий, выходящие за пределы погрешностей измерений, всегда можно интерпретировать либо как результат действия некоторых дополнительных сил, либо как результат присутствия дополнительных масс.

Логическая незавершенность экспериментальных оснований классической механики и спорный статус силы и массы неоднократно отмечались физиками разных поколений. Приведем здесь несколько высказываний.

Г.Герц: "Кажется почти невозможной сама мысль искать логические несовершенства в системе, которая разработана лучшими умами. Но прежде чем отказаться от дальнейшего исследования, следует спросить, все ли, в том числе и лучшие умы, были удовлетворены этой системой... По моему мнению, прежде всего надо указать на то, что как раз введение в механику очень трудно излагать вдумчивым слушателям, не ощущая при этом необходимости то тут, то там приносить этим слушателям, конечно, не без некоторого смущения, извинения и не испытывая желания побыстрее перейти от введения к примерам, которые говорят сами за себя" [8] (цитируется по [9]).

А.Пуанкаре: "Прежде всего мы оказываемся перед трудностями, когда хотим дать определения основным понятиям. Что такое масса? "Это, – отвечает Ньютон, – произведение объема на плотность". — "Лучше было бы сказать, – отвечают Томсон и Тэт, – что плотность есть количество массы в единице объема." – Что такое сила? "Это, – скажет Лагранж, – причина, которая производит движение тела или которая стремится произвести движение." "Это, – отвечает Кирхгоф, – произведение массы на ускорение." Но почему тогда не сказать, что масса есть количество силы, рассчитанной на единицу ускорения? Эти затруднения непреодолимы... Итак, мы возвращаемся к определению Кирхгофа: сила равна массе, умноженной на ускорение. На этот "закон Ньютона" перестают, в свою очередь, смотреть как на экспериментальный закон, он становится только определением. Но это определение также недостаточно, потому что мы не знаем, что такое масса... Не остается ничего, и наши усилия были бесплодны, – мы оказались перед необходимостью прибегнуть к следующему определению, которое, по существу, является признанием нашего бессилия: массы представляют собой коэффициенты, которые удобно вводить в вычисления... Мы должны сделать вывод, что при помощи классической системы невозможно дать удовлетворительную идею о силе и массе"[10] (цитируется по [9]).

А.Эйнштейн: "Установление связи между силой и ускорением становится возможным только после введения нового понятия массы, которое, впрочем, обосновывается только кажущимся определением" [11].

Ясно, что причина обсуждаемых здесь проблем лежит не в эксперименте, а в теории. Нельзя ли сформулировать законы классической механики так, чтобы избежать логического круга и статус входящих в теорию величин был ясен с самого начала? Попытки ответа на этот вопрос привели к двум точкам зрения на силу и массу, которые мы собираемся здесь обсудить:

1. **Сила и масса — лишние понятия и законы механики можно сформулировать без них;**

2. **Сила и масса – это не две, а одна и та же сущность, проявляющая себя по разному.**

2.1. Операциональная формулировка законов механики

Первую точку зрения следует отнести к *операционалистическому подходу* к основаниям физики [12]. Одно из главных положений операционализма гласит: **определения физических величин должны быть конструктивными**, т.е., по сути, должны быть правилами измерения определяемой величины. Кроме того, **законы природы должны формулироваться только в терминах конструктивно определенных физических величин.** Как мы выяснили в предыдущем разделе, стандартная формулировка классической механики далека от операциональной. Поскольку единственной конструктивно определяемой величиной является ускорение, операциональная формулировка механики должна опираться только на ускорение. Нижеследующий вариант операциональной формулировки классической механики принадлежит Ю.И.Кулакову, который рассматривал его в рамках своей (мета)физической[7] теории физических структур [9]. В этой формулировке исходными понятиями являются множество тел $\mathfrak{B}$ и множество сил $\mathfrak{F}$. Рассмотрим отображение $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F} \to R$, образ которого будем записывать в виде $a_{i\alpha}$ для всякого $b_i \in \mathfrak{B}$ и $f_\alpha \in \mathfrak{F}$. Будем называть $a_{i\alpha}$ ускорением[8] тела b_i, вызываемым действием си-

[7]Термин "метафизика" здесь понимается в смысле, синонимичном термину "метаматематики" – теории категорий, функторов и топосов, позволяющих оперировать с целыми математическими теориями, как с математическими объектами более высокого порядка. Таким образом, метафизика – это (возможно, будущая) теория физических теорий. Мы приводим несколько модифицированный и адаптированный для наших целей фрагмент теории физических структур Ю.И.Кулакова.

[8]Векторный аспект этой величины нам сейчас несущественен. Все последующие рассуждения справедливы для одномерного движения. 3-мерный случай получается повторением рассуждений для двух оставшихся проекций.

лы f_α. Рассмотрим теперь произвольную пару тел $\{b_i, b_j\}$ и пару сил $\{f_\alpha, f_\beta\}$. Оказывается, второй закон Ньютона можно сформулировать только на языке ускорений в следующем виде:

$$a_{i\alpha}a_{j\beta} - a_{i\beta}a_{j\alpha} = \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.5}$$

Выражение (2.5) должно выполняться для всех наборов пар тел и сил из множеств $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Мы сформулировали второй закон только на языке ускорений – образов тел и сил, от которых требуется только их существование. Количественные характеристики тел (массы) и сил (их величины) не входят в выражение (2.5).

Покажем теперь, что уравнение (2.5), в некотором смысле, эквивалентно уравнению (1.3). Для этого необходимо воспользоваться математической теоремой, строго доказанной Г.Г.Михайличенко в цикле работ, посвященных теории физических структур [13]. Теорема гласит: **если уравнение (2.5) инвариантно относительно замены тел и сил (такую инвариантность авторы назвали феноменологической симметрией), то ускорения имеют вид:**

$$a_{i\alpha} = \lambda_i F_\alpha, \tag{2.6}$$

где $\lambda_i = \lambda(b_i)$, $F_\alpha = F(f_\alpha)$ – некоторые отображения $\mathfrak{B} \to R$ и $\mathfrak{F} \to R$ соответственно. Проверить теорему в одну сторону непосредственной подстановкой этого вида в уравнение (2.5) совсем несложно. Основной результат теоремы, полученный с помощью решения непростых функционально-дифференциальных уравнений, заключается в выводе (2.6) из (2.5). Осталось узнать в правой части выражения (2.2) силу F_α и обратную массу $\lambda_i = 1/m_i$, которую иногда называют *подвижностью.* Таким образом, если ускорения, определенные на множестве тел и множестве сил, удовлетворяют феноменологически инвариантному уравнению вида (2.5), то у тел существуют массы, а у сил – их величины, такие что ускорения выражаются через них соотношениями вида (2.6). Закон Ньютона (2.6) вытекает в этой формулировке из метазакона (2.5) как строгое математическое следствие. За операциональную формулировку классической механики пришлось "заплатить" некоторой абстрактностью языка и потерей наглядности. Интересно, что первый закон Ньютона в этой формулировке не нужен: в множество сил входят на равных правах и силы инерции, так что уравнение (2.6) справедливо всегда. Третий закон Ньютона в его традиционной формулировке не вписывается в излагаемую операциональную формулировку: силы и тела – объекты разных множеств, а третий закон Ньютона в традиционной форме неизбежно перемешивает эти понятия. С помощью некоторой дополнительной структуры (алгебры тел) третий закон здесь ввести все же можно: он будет выражаться аддитивностью отображения F относительно специальной композиции тел (см. лекцию 3).

2.2. Классическая механика как 4-мерная статика релятивистских струн

Для изложения другой точки зрения на законы классической механики, нам потребуются некоторые сведения из специальной теории относительности (СТО) [14]. Напомним, что основная идея СТО, которая впервые отчетливо была сформулирована Германом Минковским в 1909 году, заключается в сродстве пространства и времени: в этой теории они образуют единую арену для событий, которая называется *пространством-временем.* Иногда пространство-время СТО называют также *4-мерным миром Минковского.* Чтобы понять разницу между абсолютными пространством и временем механики Ньютона и пространством-временем СТО, обратимся к рисункам 2.2 и 2.3.

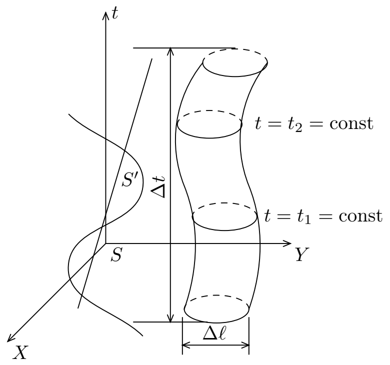

Рис. 2.2

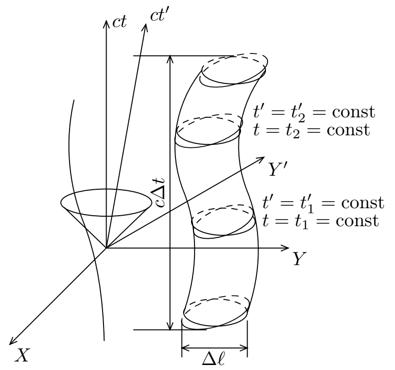

Рис. 2.3

Пространства событий классической механики Ньютона и СТО. На левой диаграмме показана мировая линия некоторого точечного тела, мировая линия начала некоторой инерциальной системы отсчета S', и кусок мировой трубки, которая представляет собой формальное объединение пространственных положений некоторого 3-мерного тела (оно показано сечениями $t = \text{const}$). На правой диаграмме показана мировая линия точечного тела, оси ct' и Y' движущейся в направлении OY инерциальной системы отсчета и 4-мерное тело – релятивистская мировая трубка, которая во всех направлениях имеет одинаковую меру – 4-мерную длину. Рассечение этого 4-мерного тела на последовательность 3-мерных тел зависит от выбора системы отсчета. Поэтому в СТО мировую трубку естественно называть *абсолютной историей.*

И то и другое состоят из элементарных событий – точек с координатами $(t, \vec{r})$ в первом случае и $(ct, \vec{r})$ во втором. Движение точки и на первой и на второй диаграмме будет представляться некоторой кривой (она называется *мировой линией*): в первом случае кривая может иметь любой наклон к оси времени (от нуля до $\pi/2$), во втором наклон ограничен конусом с образующими, наклоненными к оси времени под углом $\pi/4$. Последнее обстоятельство связано с конечностью максимальной скорости движения тел и сигналов в СТО, т.е. конечностью скорости света. Сечение мировых линий плоскостями $t = \text{const}$ будет давать мгновенное положение точки в некоторой фиксированной пространственной системе координат. Движение протяженных тел будет изображаться в обоих случаях мировыми трубками, а сечения мировых трубок линиями $t = \text{const}$ будет определять мгновенное пространственное положение этих тел в фиксированной пространственной системе координат. На этой внешней визуальной стороне сходство этих двух пространств событий заканчивается. Абсолютность времени классической механики означает его универсальный ход во всех системах отсчета. На левом рисунке показаны две системы отсчета: S – условно "неподвижная" и S' – условно "движущаяся". Промежутки времени, которые отсчитывают часы в S и S' – одинаковы, независимо от характера их движения и определяются на этой диаграмме с помощью проектирования на единственную для всех систем отсчета и всех тел ось абсолютного времени. Относительность времени СТО проявляется на правой диаграмме в том, что существует бесконечное множество времен, каждое из которых задается своим направлением в 4-мерном пространстве времени. Промежутки времени между парой событий зависят от выбора линии времени, т.е. системы отсчета, и связаны друг с другом по известным формулам СТО.

Еще большая разница между двумя диаграммами проявляется в том, что в классической механике расстояние между событиями можно вычислять только для одновременных пар событий, в то время как в пространстве-времени СТО расстояние (*4-мерный интервал*) определен между любой парой событий. Если в некоторой системе отсчета события оказались разделенными промежутком времени Δt и пространственным интервалом Δl, то 4-мерное расстояние между этими событиями определяется формулой:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2. \tag{2.7}$$

Величина этого интервала не зависит от выбора системы отсчета – это обстоятельство позволяет вывести законы перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой (*преобразования Лоренца*), а вот разделение этого интервала на пространственную и временную части – в некоторой степени условно. При смене системы отсчета часть пространственной проекции интервала переходит во временную и наоборот, примерно так же как XY-проекции жесткого стержня на плоскости могут переходить друг в друга по определенным законам при вращении системы координат OXY. Обращаясь к мировым трубкам на обеих диаграммах, можно сказать, что мировая трубка на левой диаграмме – объект искусственный, поскольку его вертикальный размер измеряется в секундах, а горизонтальный (толщина) – в метрах. Эти величины абсолютно несоизмеримы в рамках классической механики Ньютона, поэтому мировую трубку в классической механике, равно как и все пространство событий, надо представлять себе как формальное объединение мгновенных положений тела или мгновенных пространств (пачка разъединенных друг с другом, но плотно прижатых листов, ширина и толщина которых измеряется в разных и абсолютно не связанных между собой единицах). С другой стороны, мировая трубка СТО представляет собой единый 4-мерно протяженный объект, который измерим с помощью интервала (3.4) в единых единицах (например, метрах) во всех направлениях – как пространственных, так и временных. Это 4-мерное тело – есть "застывшая" в 4-мерном мире история некоторого 3-мерного тела. Такое 4-мерное тело всегда вытянуто вдоль временного направления и потому похоже на изогнутый тонкий стержень. Каждая система отсчета задает набор сечений стержня плоскостями одновременных событий: эти сечения 3-мерны и в выбранной системе отсчета задают совокупность мгновенных положений некоторого 3-мерного тела. В другой системе отсчета этот же стержень будет задавать другую последовательность сечений. Поскольку очертания стержня в 4-мерном пространстве не зависят от выбора системы отсчета (от нее зависит только способ рассечения стержня на 3-мерные сечения), этот стержень естественно называть *абсолютной историей.* Последовательность 3-мерных тел, определяющая *относительную историю* некоторого 3-мерного тела, определится только после задания системы отсчета и плоскостей одновременных событий, ассоциированных с ней. Именно абсолютные истории тел и будут предметом нашего рассмотрения. Заметим, что в существующей литературе по СТО обычно ограничиваются рассмотрением одномерных мировых линий, а 4-мерные протяженные тела не рассматривают.

Если мы принимаем 4-мерную точку зрения и рассматриваем 4-мерные мировые стержни как некую новую физическую реальность релятивистской природы, естественно рассмотреть их 4-мерные физические свойства. Поскольку в 4-мерном мире стержни покоятся, мы имеем дело с 4-мерным вариантом статики. Эту статику можно построить по аналогии со статикой обычных 3-мерных стержней. Напомним, что обычные стержни могут испытывать деформации растяжения-сжатия, кручения и изгиба [15]. Для не слишком сильных деформаций их можно рассматривать независимо друг от друга. При этом каждому виду деформации соответствует свое выражение для упругой энергии соответствующей деформации. Так, для энергии кручения обычного 3-мерного стержня получается следующее выражение:

$$\mathcal{E}_{\text{крут}} = \int \frac{C\tau^2}{2}\, dl, \tag{2.8}$$

где τ – угол относительного поворота сечений стержня, отнесенный к единице длины (эта величина называется *кручением*), C – крутильная жесткость, зависящая от упругих постоянных и формы сечения, а интегрирование производится вдоль оси стержня. Для энергии изгиба $\mathcal{E}_{\text{изг}1}$ продольно не напряженного стержня получается более сложное выражение, которое нам не потребуется. Наконец, сильно натянутый стержень, изогнутый под действием поперечной нагрузки, обладает упругой энергией:

$$\mathcal{E}_{\text{изг}2} = T \int dl, \tag{2.9}$$

где T – натяжение стержня, а интегрирование производится вдоль его оси в изогнутом состоянии. Отметим, что сильно натянутые стержни называются *струнами.* В отличие от нерастянутых стержней, их сопротивление на изгиб определяется именно натяжением, а не изгибной жесткостью, зависящей от упругих постоянных материала стержня и формы его сечения. Таким образом для струн $\mathcal{E}_{\text{изг}2} \gg \mathcal{E}_{\text{изг}1}$.

Для формулировки законов 4-мерной статики потребуется некоторое обобщение приведенных соотношений. При этом изначально неясно, какая из видов энергий будет доминировать при описании статики 4-мерных стержней, совместимой с наблюдаемой в 3-мерном мире механикой Ньютона. Оставляя технические детали в стороне, мы приводим только результат [16]. Для того, чтобы уравнения 4-мерной статики в нерелятивистском пределе воспроизводили классическую механику Ньютона, необходимо выполнение следующих условий:

1. Стержни необходимо считать натянутыми струнами, причем 4-мерная времениподобная сила натяжения связана с 3-мерной массой соотношением[9]: $T = mc^2$. При этом, выражение для упругой энергии изгиба натянутого стержня типа (2.9) становится пропорциональным действию свободной частицы массы m:
$$\mathcal{E}_{\text{изг}2} = cS_{\text{поступ}} = -mc^2 \int ds. \tag{2.10}$$

2. 3-мерная плотность массы ρ связана с модулем сдвига ζ 4-мерного материала стержня соотношением: $\rho c^2 = \zeta$. При этом 4-мерная энергия кручения стержня становится пропорциональной вращательной части действия для твердого тела в классической механике:
$$\mathcal{E}_{\text{крут}} = cS_{\text{вращ}} = c \int \frac{\mathcal{J}(\omega, \omega)}{2}\, dt, \tag{2.11}$$
где $\mathcal{J}$ — тензор инерции, ω — угловая скорость вращения тела, связанная с кручением τ 4-мерного стержня соотношением: $\tau = \omega/c$.

[9]Напомним, что сила в 4-мерном мире должна иметь размерность 3-мерной энергии, поскольку обычная 3-мерная сила есть 4-мерная сила, отнесенная к единице длины 4-мерного стержня.

3. Собственная изгибная жесткость стержней роли не играет, т.е. стержни ведут себя именно как струны. Ввиду отождествления $\zeta = \rho c^2 = T/V$, где V — объем 3-мерного сечения в сопутствующей стержню системе отсчета, мы видим что и сдвиговая жесткость (т.е. вращательная инерция) целиком обусловлена натяжением стержня.

Итак, в построенной нами картине масса представляет собой ни что иное, как (с точностью до размерного множителя) времениподобную силу, растягивающую стержень настолько сильно, что его 4-мерные упругие свойства определяются этим растяжением. **В 4-мерном мире обычные силы и масса выступают на равных правах как различные проекции 4-сил.**

Чтобы получше уяснить силовую природу массы обратимся к известной формуле лапласова давления (см. рис. 2.4):

$$\Delta p = 2\sigma \overline{R^{-1}}, \tag{2.12}$$

которая связывает перепад давлений жидкости или газа по разные стороны натянутой пленки с величиной локального поверхностного натяжения и средней кривизной $k = \overline{R^{-1}} = (1/R_1 + 1/R_2)/2$ в состоянии равновесия пленки. Эта формула имеет и одномерный аналог (см.рис.2.5):

$$\frac{dF}{dl} = \frac{T}{R} \tag{2.13}$$

– для нормальной к натянутой нити изгибающей ее силы F, силы натяжения нити T и радиуса кривизны R изогнутой нити в данной точке. Здесь dF/dl – это "одномерное давление".

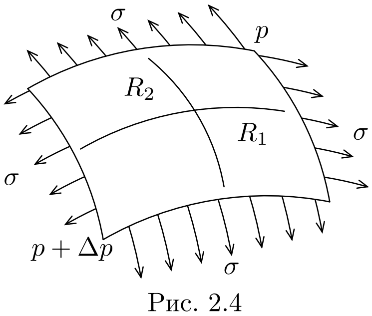

Рис. 2.4

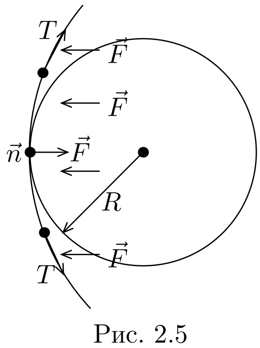

Рис. 2.5

Сейчас мы покажем, что уравнение (2.13) это и есть несколько упрощенная форма второго закона Ньютона. Действительно, вектор 4-скорости мировой линии частицы U – единичный, поэтому вектор ускорения dU/ds – является ничем иным, как вектором кривизны мировой линии, а его модуль равен $k = 1/R$ — модулю этой кривизны [17]. Обычные силы, действующие на частицу всегда пространственноподобны, то есть действуют в направлении, ортогональном U. Они и играют роль линейной плотности изгибающих сил в (2.13). Записывая теперь 3-мерную часть второго закона Ньютона в виде:

$$\vec{f} = mc^2\vec{k} = \frac{mc^2\vec{n}}{R},$$

где $\vec{n}$ единичный вектор направления кривизны (выпячивания стержня), и сопоставляя этот вид с (2.13), мы видим, что величина mc^2 действительно играет роль натяжения мировой линии или мирового стержня. Отметим, наконец, что первый закон Ньютона в этой картине эквивалентен известному утверждению, что сильно растянутая струна в отсутствие действия поперечных сил остается прямолинейной. Третий закон Ньютона остается без изменения. Его приближенным следствием для времениподобных сил является закон сохранения массы.

Мы не обсуждаем здесь другие интересные следствия 4-мерной статики, которые освещают многие стороны окружающего нас мира в новом свете. Их можно найти в оригинальной работе [16].

3. Природа третьего закона Ньютона

Логическую незавершенность механических экспериментов и уравнений динамики без третьего закона Ньютона мы уже обсуждали в предыдущей лекции. В ее последней части мы показали, что законы 3-мерной динамики можно свести к законам 4-мерной статики абсолютных историй в 4-мерном мире Минковского. Эта статика, как и обычная 3-мерная, опирается на законы равновесия (равенство нулю равнодействующей сил и моментов) и третий закон Ньютона.

Для того чтобы получше разобраться с природой этого закона обратимся к аксиоматике классической механики Ньютона, развитой в работах У. Нолла и его школы в 50-60-е годы XX века. Для наших целей мы несколько адаптируем изложение необходимых нам аксиом тел и сил [18]. Аксиоматика тел и сил в абстрактной форме заключает в себе общие свойства любых тел и любых сил, с которыми приходится иметь дело в классической механике. Будем рассматривать тела $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ как элементы некоторого универсального множества Ω, называемого *механической вселенной*. Между телами существуют обычные отношение включения (например, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ – "тело $\mathcal{A}$ является частью тела $\mathcal{B}$") и операции наложения тел $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ("общая часть") и их соединения $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ("составное тело") со всеми своими обычными свойствами. Пустое тело будем изображать символом $\emptyset$, а всеобъемлющее — символом $\aleph$. Эти тела обладают характерными для них свойствами:

$$\emptyset \subseteq \mathcal{A} \quad \text{для всех} \quad \mathcal{A} \in \Omega; \quad \mathcal{A} \subseteq \aleph \quad \text{для всех} \quad \mathcal{A} \in \Omega.$$

Если два тела не имеют никаких других общих частей кроме $\emptyset$, они называются *отделенными*. Для любого тела $\mathcal{A} \in \Omega$ существует единственное тело $\mathcal{A}^{\text{ext}}$, называемое *внешностью* тела $\mathcal{A}$, такое что

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{\text{ext}} = \aleph; \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^{\text{ext}} = \emptyset.$$

Очевидны следующие соотношения:

$$\emptyset^{\text{ext}} = \aleph; \quad \aleph^{\text{ext}} = \emptyset,$$

а также соотношения:

$$(\mathcal{A}^{\text{ext}})^{\text{ext}} = \mathcal{A}; \quad \text{из} \quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \quad \text{следует} \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^{\text{ext}} = \emptyset. \tag{3.14}$$

Обратное к последнему также верно во вселенной Ω: единственными телами, отделенными от $\mathcal{A}^{\text{ext}}$ являются части тела $\mathcal{A}$. Нетрудно убедиться и в справедливости *соотношений де Моргана:*

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\text{ext}} = \mathcal{A}^{\text{ext}} \cap \mathcal{B}^{\text{ext}}; \quad (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\text{ext}} = \mathcal{A}^{\text{ext}} \cup \mathcal{B}^{\text{ext}}. \tag{3.15}$$

Имеет место важная формула разложения:

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup (A \cap \mathcal{B}^{\text{ext}}), \tag{3.16}$$

для любого тела $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. При этом компоненты разложения отделены:

$$\mathcal{B} \cap (A \cap \mathcal{B}^{\text{ext}}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^{\text{ext}} = \emptyset.$$

Рассмотрим теперь векторнозначные функции на парах отделенных тел вида $\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Будем называть такой вектор *силой, с которой тело $\mathcal{B}$ действует на тело $\mathcal{A}$.* В классической механике силы удовлетворяют *принципам суперпозиции* и *аддитивности.* Оба эти принципа отражаются свойствами аддитивности силовой функции по второму и первому аргументам соответственно:

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}\cup\mathcal{C})=\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})+\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}); \tag{3.17}$$

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{B}\cup\mathcal{C},\mathcal{A})=\overrightarrow{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})+\overrightarrow{F}(\mathcal{C},\mathcal{A})$$

для любых попарно отделенных тел $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$. Полагая в соотношениях аддитивности $\mathcal{B}=\emptyset$ или $\mathcal{C}=\emptyset$, получаем, что для нулевого тела имеют место соотношения:

$$\overrightarrow{F}(\emptyset,\mathcal{A})=\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\emptyset)=\overrightarrow{0}$$

для всякого тела $\mathcal{A}\in\Omega$.

Рассмотрим теперь силу $\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{\mathrm{ext}})$, с которой внешность тела $\mathcal{A}$ воздействует на него. Эта сила в механике называется *равнодействующей.* Рассмотрим два отделенных тела $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Второе свойство (2.1) и формула разложения (3.16) в комбинации с тождествами де Моргана (3.15) дает:

$$\mathcal{A}^{\mathrm{ext}}=\mathcal{B}\cup(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\mathrm{ext}};\quad \mathcal{B}^{\mathrm{ext}}=\mathcal{A}\cup(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\mathrm{ext}}. \tag{3.18}$$

В силу принципа суперпозиции сил имеем:

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{\mathrm{ext}})=\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})+\overrightarrow{F}(\mathcal{A},(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\mathrm{ext}});$$

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{B},\mathcal{B}^{\mathrm{ext}})=\overrightarrow{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})+\overrightarrow{F}(\mathcal{B},(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\mathrm{ext}}).$$

Складывая оба уравнения, используя принцип аддитивности силы в обратную сторону и собирая выражения с внешностями в правой части получаем:

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})+\overrightarrow{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})=\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{\mathrm{ext}})+\overrightarrow{F}(\mathcal{B},\mathcal{B}^{\mathrm{ext}})- \tag{3.19}$$

$$-\overrightarrow{F}(\mathcal{A}\cup\mathcal{B},(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\mathrm{ext}})$$

— основное тождество, необходимое для анализа природы третьего закона Ньютона. Из соотношения (3.19) следует, что в механической вселенной, в которой выполняются силовые принципы суперпозиции и аддитивности **третий закон Ньютона имеет место тогда и только тогда, когда равнодействующая также является аддитивной функцией первого аргумента на отделенных телах:**

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})+\overrightarrow{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{F}(\mathcal{A}\cup\mathcal{B},(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\mathrm{ext}})= \tag{3.20}$$

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{\mathrm{ext}})+\overrightarrow{F}(\mathcal{B},\mathcal{B}^{\mathrm{ext}})$$

для всех $\mathcal{A}\in\Omega$, $\mathcal{B}\in\Omega$ и $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\emptyset$. Это утверждение составляет суть *теоремы Нолла.* Обозначим выражение $\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})+\overrightarrow{F}(\mathcal{B},\overrightarrow{A})$ через $\overrightarrow{\Delta}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и назовем его *невязкой сил* для тел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Теорема Нолла утверждает, что невязка является мерой неаддитивности взаимодействия составного тела $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ с окружением. Рассмотрим теперь мир статики. В статике для любого тела $\mathcal{A}$ имеем: $\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{\mathrm{ext}})=0$. Из теоремы Нолла сразу следует, что в мире статики невязка сил для любой пары тел тождественно равна нулю. Иными словами, в **статике третий закон Ньютона выполняется в силу общих принципов суперпозиции и аддитивности сил.** Нетрудно понять, что третий закон Ньютона оказывается сильнее, чем каждый из принципов суперпозиции или аддитивности по отдельности. Действительно, применяя третий закон к каждому слагаемому в условиях (3.17), убеждаемся, что условие аддитивности сил становится принципом суперпозиции и наоборот на любой тройке попарно разделенных тел. Это означает, что справедливость третьего закона и одного из принципов влечет справедливость второго принципа, в то время как сам третий закон вытекает из принципов суперпозиции и аддитивности лишь при дополнительном условии аддитивности равнодействующей, который из принципов аддитивности и суперпозиции не следует.

Теперь попытаемся несколько обобщить формулировки для того, чтобы рассматривать силы взаимодействия и принципы суперпозиции и аддитивности не только на отделенных телах. Доопределим соотношения (3.17) на телах с отличным от нулевого тела наложением:

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}\cup\mathcal{C})=\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})+\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{C})-\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}\cap\mathcal{C}); \tag{3.21}$$

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{B}\cup\mathcal{C},\mathcal{A})=\overrightarrow{F}(\mathcal{B},\mathcal{A})+\overrightarrow{F}(\mathcal{C},\mathcal{A})-\overrightarrow{F}(\mathcal{B}\cap\mathcal{C},\mathcal{A}). \tag{3.22}$$

Эти соотношения при $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}=\emptyset$ переходят в (3.17) и, фактически, учитывают, что силовое взаимодействие $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$, если оно отлично от нуля, в формулах (3.17) учитывается дважды.

Рассмотрим теперь силу взаимодействия на телах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\mathcal{C}\neq\emptyset$. Используя представления:

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}'\cup(\mathcal{A}\cap\mathcal{B});\quad \mathcal{B}=\mathcal{B}'\cup(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}); \tag{3.23}$$

где $\mathcal{A}'=\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'=\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}$ — **выступы $\mathcal{A}$ над $\mathcal{B}$** и **$\mathcal{B}$ над $\mathcal{A}$** соответственно (со всеми свойствами теоретико-множественной разности), определим силу взаимодействия не отделенных тел следующим образом:

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})=\overrightarrow{F}(\mathcal{A}'\cup(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}),\mathcal{B}'\cup(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}))=$$
$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A}',\mathcal{B}')+\overrightarrow{F}(\mathcal{A}',\mathcal{A}\cap\mathcal{B})+\overrightarrow{F}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B},\mathcal{B}')+\overrightarrow{F}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B},\mathcal{A}\cap\mathcal{B}). \tag{3.24}$$

В случае отделенных тел наше определение переходит в тождество вида $\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})=\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. В случае неотделенных оно читается так: **сила, с которой тело $\mathcal{B}$ действует на неотделенное от него тело $\mathcal{A}$ складывается из силы действия выступа $\mathcal{B}'$ на выступ $\mathcal{A}'$, силы действия наложения на выступ $\mathcal{A}'$, силы действия выступа $\mathcal{B}'$ на наложение и силы действия наложения самого на себя, т.е. самодействия наложения.** Первые три слагаемых – это обычные силы на отделенных телах, значит вся новизна в определении силового взаимодействия не отделенных тел содержится в свойствах сил самодействия вида: $\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{A})\equiv\overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A})$.

Выясним природу этой силы. Рассмотрим силу взаимодействия некоторого тела $\mathcal{A}$ с всеобъемлющим телом $\aleph$. В силу нашего определения (3.24), имеем:

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\aleph)=\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{\mathrm{ext}})+\overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A}).$$

Это означает, что силу самодействия можно представить как разность:

$$\overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A})=\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\aleph)-\overrightarrow{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}^{\mathrm{ext}})$$

силы взаимодействия с всеобъемлющим телом и равнодействующей. Поскольку все обычные тела классической механики в определенном смысле "малы" по сравнению как с окружением, так и с всеобъемлющим телом, мы имеем[10] $\mathcal{A}^{\rm ext} \approx \aleph$ и поэтому

$$\overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A}) \approx 0.$$

Тем не менее, сила самодействия все же может возникать как результат неполной компенсации двух приблизительно равных величин.

Покажем теперь, что механическая вселенная с аддитивной равнодействующей и нетривиальным взаимодействием неотделенных тел невозможна. Для этого нам потребуются обобщение тождеств (3.16) на случай не отделенных тел и принцип суперпозиции для выступов. Нетрудно проверить, что для неотделенных тел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ тождества (3.16) принимают вид:

$$\mathcal{A}^{\rm ext} = \mathcal{B}\cup(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\rm ext}\setminus(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}); \quad \mathcal{B}^{\rm ext} = \mathcal{A}\cup(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\rm ext}\setminus(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}). \tag{3.25}$$

Принцип суперпозиции для выступов в силу их определений имеет вид:

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}\setminus\mathcal{C}) = \overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}\cup\mathcal{C}) - \overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C}). \tag{3.26}$$

Теперь, проделав выкладки, аналогичные проделанным нами при выводе (3.24), с учетом (3.25) и (3.26) получаем:

$$\begin{gathered}\overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \overrightarrow{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) - \overrightarrow{F}(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}, \mathcal{A}\cap\mathcal{B}) - \overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = \\ \overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\rm ext}) + \overrightarrow{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^{\rm ext}) - \overrightarrow{F}(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}, (\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\rm ext}) - \\ \overrightarrow{F}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}, (\mathcal{A}\cup\mathcal{B})^{\rm ext})\end{gathered} \tag{3.27}$$

— соотношение, обобщающее (3.19) на случай $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} \neq \emptyset$. Из него сразу следует *обобщенная теорема Нолла*: **аддитивность равнодействующей на всех телах эквивалентна выражению для невязки:**

$$\overrightarrow{\Delta}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \overrightarrow{F}(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}, \mathcal{A}\cap\mathcal{B}) + \overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}). \tag{3.28}$$

Предположим, что равнодействующая аддитивна на всех телах и рассмотрим полученное выражение детальнее. Используя разложение

[10] Сравнение тел на Ω требует введения меры. Для обычных геометрической меры — объема и физической меры — массы, условия малости тела сводятся к сильным неравенствам $V(\mathcal{A}) \ll V(\mathcal{A}^{\rm ext})$ или $M(\mathcal{A}) \ll M(\mathcal{A}^{\rm ext})$, которые, практически, всегда выполняются.

(3.23) и обозначая $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{C}$, после элементарных упрощений, получаем из (3.28):

$$\overrightarrow{\Delta}(\mathcal{A}', \mathcal{B}') + \overrightarrow{F}(\mathcal{C}, \mathcal{A}' \cup \mathcal{B}') = \overrightarrow{0}. \tag{3.29}$$

Тела $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ и $\mathcal{C}$ можно рассматривать как произвольные отделенные тела, поэтому, в частности, для $\mathcal{A}' = \emptyset$ (3.29) дает:

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}') = \overrightarrow{0}.$$

на всех отделенных телах. Таким образом, **во вселенной с взаимодействием неотделенных тел, в которой равнодействующая аддитивна, отделенные тела вообще не взаимодействуют друг с другом (следовательно аддитивная равнодействующая просто равна нулю,) а неотделенные взаимодействуют только посредством силы самодействия их общей части.** Для такой системы сил $\overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \overrightarrow{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Кроме того, сила самодействия обладает свойством аддитивности:

$$\overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A}_1) + \overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A}_2)$$

для любого разбиения $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ с $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$.

На самом деле, в мире с самодействием роль равнодействующей должна играть полная сила $\overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \aleph)$, а не равнодействующая $\overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\mathrm{ext}})$. Условие аддитивности полной силы будет иметь вид:

$$\overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \aleph) + \overrightarrow{F}(\mathcal{B}, \aleph) - \overrightarrow{F}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \aleph) - \overrightarrow{F}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}, \aleph) = \overrightarrow{0}.$$

Добавляя и вычитая в правую часть (3.27) необходимые слагаемые самодействия вида $\overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \ldots,$ и выполняя необходимые упрощения, приходим к тому же результату: **во вселенной с аддитивной полной силой отделенные тела не взаимодействуют, а неотделенные взаимодействуют только за счет самодействия их наложения.** Очевидно, содержательная статика в таком мире невозможна, поскольку если $\overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \aleph) = \overrightarrow{0}$ для всякого $\mathcal{A}$, то и $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \overrightarrow{0}$ для всякого $\mathcal{A}$, т.е. силы вообще отсутствуют.

Интересно, что получившуюся необычную вселенную можно интерпретировать по другому. Рассмотрим более широкую вселенную $\Omega' = \Omega \cup \{\beth\}$, в которой тела из Ω не взаимодействуют друг с другом, но взаимодействуют с телом $\beth$. Положим $\overrightarrow{\mathfrak{F}}(\mathcal{A}) \equiv \overrightarrow{F}(\mathcal{A}, \beth)$ для всех $\mathcal{A} \in \Omega$. При этом $\overrightarrow{F}$ удовлетворяет только принципу аддитивности. Мы видим, что в такой расширенной вселенной наблюдатель, являясь частью Ω, воспринимает силу взаимодействия с телом $\beth$, лежащим за пределами вселенной Ω, как самодействие. Если эксперименты с телом $\beth$ во вселенной Ω принципиально невозможны, то выбор между языками самодействия и "трансцендентного" взаимодействия навсегда останется вопросом личных философких убеждений исследователя!

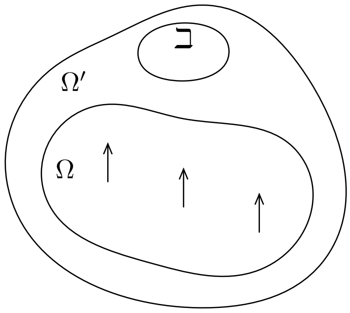

Рис. 3.1. Вселенная Ω с самодействием устроена также как вселенная $\Omega' = \omega \cup \{\beth\}$ без самодействия. Роль ускоряющей силы играет сила взаимодействия тел Ω с телом $\beth$, которое само наблюдениям недоступно. Такое взаимодействие, по этой причине, будет восприниматься наблюдателями из Ω как самодействие, обладающее свойством аддитивности.

Литература

[1] Ю.С.Владимиров, *Системы отчета в теории гравитации* М. Энергоиздат, 1982

[2] А.Пуанкаре, *Наука и гипотеза (в сб. статей "О науке")* М. Наука, 1990

[3] Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уиллер, *Гравитация (в трех томах)* М. Мир, 1977

[4] П.Дэвис, *Суперсила* М. Мир, 1989

[5] Ю.С.Владимиров, *Пространство-время: явные и скрытые размерности* М. Наука, 1989

[6] Б.Грин, *Элегантная Вселенная* М. УРСС, 2004

[7] П.А.М.Дирак, *Принципы квантовой механики* М. ГИФМЛ, 1960

[8] Г.Герц, *Принципы механики, изложенные в новой связи* М. 1959

[9] Ю.И.Кулаков, Ю.С.Владимиров, А.В.Карнаухов, *Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику* М. Архимед, 1992

[10] А.Пуанкаре, *Идеи Герца в механике* (в кн. [8])

[11] А.Эйнштейн, *Механика Ньютона и ее влияние на формирование теоретической физики, в сб. А.Эйнштейн, "Физика и реальность"* М. Наука, 1965

[12] Р.Карнап, *Философские основания физики* М. Прогресс, 1971

[13] Г.Г.Михайличенко, *Решение функциональных уравнений в теории физических структур* ДАН СССР, 1972, т.206, №5, с.1056-1058

[14] В.Паули, *Теория относительности* М. Наука, 1991

[15] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теория упругости* М. Наука, 1987

[16] S.S.Kokarev, *Nuovo Cimento B* **116**, 915 (2001), gr-qc/0108007

[17] Е.В.Шикин, Э.Г.Поздняк, *Основы дифференциальной геометрии* М. МГУ, 1990

[18] К.Трусделл, *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред* М. Мир, 1975