

Что такое сила трения качения?

С.С.Кокарев[†], С.В.Турунтаев^{*†}
[†]РНОЦ "Логос", * ЯГПУ, Ярославль

Аннотация

Обсуждается природа и механизмы силы трения качения. На основе упрощенных моделей проведен сравнительный количественный анализ вкладов различных механизмов в эту силу при различных условиях качения.

What is rolling friction force?

S.S.Kokarev[†], S.V.Turuntaev^{*†}
[†]RSEC "Logos", * YaSPU, Yaroslavl

Abstract

We discuss nature and mechanisms of rolling force friction. Basing upon simplified models we carry out comparative analysis of a various mechanisms contributions under different rolling conditions.

1. Введение

Существующий в учебной литературе разброс мнений о природе и способах описания силы трения качения отчасти обусловлен расплывчатым характером ее определений и, главным образом, неоднозначным механизмом ее реализации в различных ситуациях. Так, в [1] сила трения качения качественно объясняется наличием "бугорка" поверхности, на который постоянно наезжает передняя часть движущегося колеса (см. рис. 1.1).

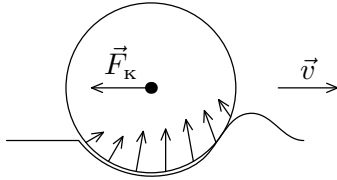


Рис. 1.1. Сила трения качения как результат несимметричной деформации поверхности вблизи катящегося колеса.

мым по формуле:

$$F_k = \mu_k N. \quad (1.1)$$

В другой популярной публикации [2] утверждается, что при качении колеса сила тяжести и сила реакции образуют пару сил, которая, в свою очередь, создает момент, тормозящий качение (см. рис. 1.2).

При этом этот момент выражается по формуле:

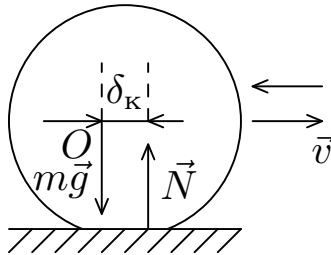


Рис. 1.2. Сила трения качения как результат несимметричного распределения момента силы реакции на площадке контакта.

$$M_k = \delta_k N, \quad (1.2)$$

где δ_k — параметр, имеющий размерность длины, так же называемый коэффициентом трения качения. В классическом учебнике Д.В.Сивухина [3] находим лишь замечание о том, что "трение качения формально подчиняется тем же законам, что и трение скольжения. Однако коэффициент трения при качении значительно меньше,

чем при скольжении." Эти и другие объяснения, которые можно найти в учебной литературе [4, 5, 6], на наш взгляд, затрагивают лишь "вершину айсберга" под названием "сила трения качения" и каждый из подходов, как правило, опирается лишь на какой-то один (весьма грубый и качественный) механизм.

Если не вникать в детали механизмов силы трения качения, которые рассеяны во множестве оригинальных научных статей и монографий, эту силу следовало бы *определять чисто энергетически*, опира-

ясь на достоверный факт: для поддержания постоянной скорости качения круглого предмета (цилиндра, кольца, шара и т.д.) по ровной поверхности к этому предмету необходимо прикладывать некоторую силу F . В силу общих законов механики, должна существовать "сила" — ее и следует называть *силой трения качения* — действующая на предмет в целом, равная по модулю F и противоположная ей по направлению. В настоящей статье мы собираемся показать, что *без конкретизации условий качения (характера приложения силы, геометрических параметров катящихся тел, скорости качения и ряда других) невозможно однозначно указать конкретный механизм ее действия*. Мы убедимся, что, в принципе, это механизм почти всегда имеет сложный (составной) характер, но в конкретных условиях одна из составляющих механизма может доминировать над другими.

В первой части статьи мы приведем примеры относительно простых ситуаций, которые, помимо самостоятельного учебного интереса, выявляют некоторые особенности качения тел, важные при анализе механизмов трения качения. Во второй части мы обсудим некоторые наиболее простые в идейном плане конкретные механизмы силы трения качения и на основе количественных оценок проведем их сравнительный анализ.

2. Некоторые задачи с качением тел

Качение тел по плоской поверхности — весьма распространенный вид механического движения. Однако, решение конкретных задач, связанных с качением тел, как правило, вызывает затруднения, которые можно было бы, в значительной степени, избежать, если в самом начале изучения этой темы более четко определить понятие силы трения качения. Дело в том, что при качении тел приходится иметь дело с тремя различными видами сил трения: силой трения покоя (у некоторых авторов "сцепления"), трения скольжения и трения качения (в узком собственном смысле). Только с последними двумя силами связана диссипация механической энергии (т.е. превращение механической энергии в тепло). Сила трения покоя, хотя и играет роль в динамике движения, механической работы не совершает.

Привычка, или сложившийся стереотип решения задач, связанные с заменой распределенной по поверхности силы ее равнодейству-

ющей с определенной точкой приложения, приводят в случае трения качения к ряду "парадоксов", которых можно избежать, отказавшись от однозначности в трактовке этой силы. Ряд авторов классических учебников по физике для вузов, как правило, избегают рассмотрения этого вопроса. Полагая, что силы трения качения в обычных условиях невелики авторы учебников и задачник при рассмотрении задач на качение тел с проскальзыванием и без него, как правило, ограничиваются замечанием о том, что силами трения качения можно пренебречь, не оценивая значимость такого упрощения. Действительно, такой подход позволяет решить ряд задач достаточно просто и эффективно. При этом в ряде случаев используется закон сохранения механической энергии. Однако, несложный анализ обнаруживает, что при вынужденном качении тел по горизонтальной поверхности *сила трения покоя может быть направлена в любую сторону и может даже обратиться в нуль*, что для сил трения качения в узком смысле невозможно. В этой ситуации даже возникает вопрос: по сравнению с какой силой можно пренебречь силой трения качения?

Задача о вынужденном качении достаточно поучительна и ее решение мы здесь обсудим. Цилиндр массы M и радиуса R находится на горизонтальной шероховатой поверхности. На цилиндре имеется шкив радиуса $r < R$. На шкив наматывается нить, которую тянут за конец с постоянной силой F . Исследуем зависимость силы трения покоя f от радиуса шкива и выясним условия, при которых качение будет происходить со скольжением. Силы трения качения в узком смысле будем, как это и принято, считать пренебрежимо малыми.

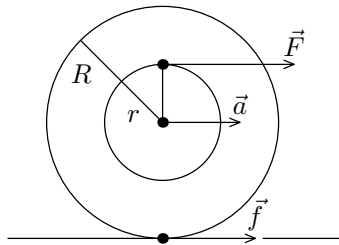


Рис. 2.1. Вынужденное качение цилиндра.

$$f = \frac{2r - R}{2r + R} F.$$

Силы, действующие на цилиндр изображены на рис. 2.1. Записав уравнение поступательного и вращательного движения в отсутствие проскальзывания:

$$F + R = Ma; \quad (F - f)r = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a}{R},$$

получаем выражение для силы трения покоя:

График полученной зависимости представлен на рис.2.2. Скольже-

ния не будет, пока $|f| \leq \mu mg$, (μ — коэффициент трения), т.е. при

$$\mu \geq \left| \frac{F}{Mg} \left(\frac{2r - R}{2r + R} \right) \right|.$$

Если силу F приложить на расстоянии $r = R/2$ от центра, скольжения не будет при любом сколь угодно малом коэффициенте трения. При приложении силы F вблизи центра катящегося тела, возникающая сила трения покоя, практически, равна по модулю и противоположна по направлению приложенной внешней силе. Если же внешнюю силу приложить на расстоянии $r > R/2$ от центра катящегося цилиндра, сила трения покоя будет направлена в ту же сторону, что и внешняя сила.

Это интересное обстоятельство иллюстрирует нашу идею, высказанную во введении. Часть механизмов силы трения качения обусловлена физическими процессами, происходящими на площадке контакта. В частности, одной из важных характеристик этих процессов является истинное распределение напряжений на ней. Разобранная задача наглядно демонстрирует, что *распределение напряжений на площадке контакта кардинальным образом зависит от способа приложения силы, т.е. от условий качения*. Естественно ожидать, что и сила трения качения будет существенно зависеть от этих условий.

Задачи подобного типа нуждаются в уточнении для объяснения ряда наблюдаемых эффектов, возникающих при качении. В качестве примера рассмотрим особенности движения бильярдных шаров. Рассмотрим следующий вопрос: как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы сила трения шара о сукно заставляла его двигаться: а) ускоренно; б) замедленно; в) равномерно. Для упрощения анализа предположим, что удар наносится кием горизонтально в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и точку касания его с поверхностью бильярдного стола (рис. 2.3).

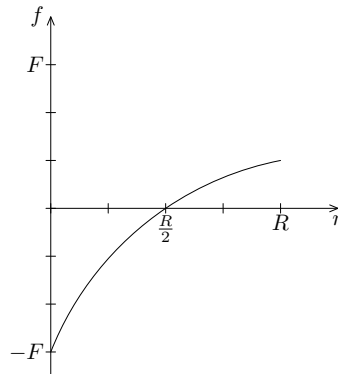


Рис. 2.2. График зависимости силы трения качения на площадке контакта от точки приложения внешней силы.

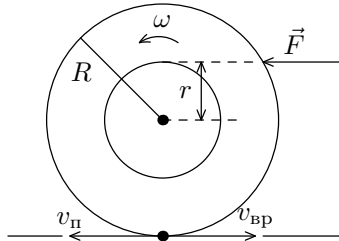


Рис. 2.3. Удар по бильярдному шару.

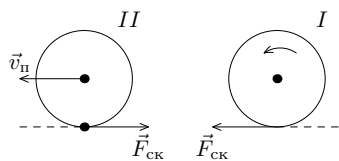


Рис. 2.4. Различные направления силы трения скольжения в зависимости от характера движения бильярдного шара.

На первый взгляд, может показаться странным, что после удара шар может двигаться по столу ускоренно, поскольку принято считать, что силы трения всегда направлены в сторону, противоположную движению. На самом деле, в зависимости от условий удара, сила трения может быть направлена как по скорости движения, так и против нее (2.4). Действительно, вследствие удара шар приобретает как поступательное, так и вращательное движение. Здесь возможны три различных ситуации.

1. Если скорость поступательного движения меньше линейной скорости вращательного движения точек на поверхности шара ($v_{\pi} < v_{в}$), то шар движется с проскальзыванием и возникает сила трения скольжения, направленная в сторону движения, увеличивающая скорость поступательного движения и уменьшающая скорость вращательного движения до тех пор, пока эти скорости не сравняются. После этого потери механической энергии шара при его качении будут определяться силой трения качения в узком смысле.

2. Если скорость поступательного движения будет больше скорости вращательного движения ($v_{\pi} > v_{в}$), то шар будет двигаться замедленно.

3. При ($v_{\pi} = v_{в}$) шар покатится с последующей постепенной потерей энергии за счет действия сил трения качения.

Необходимые условия удара (см. рис. 2.3) находятся из уравнений динамики поступательного и вращательного движений (без учета сил трения качения):

$$F = \frac{dv_{\pi}}{dt}; \quad Fr = J \frac{d\omega}{dt},$$

где $J = 2mR^2/5$ — момент инерции шара. Отсюда:

$$dv_{вп} = \frac{Fr dt}{2mR/5}; \quad dv_{\pi} = \frac{F dt}{m}.$$

В силу того, что начальные значения поступательной и вращательной скоростей равны нулю, имеем:

$$v_{\text{п}} < v_{\text{в}} \quad \text{при} \quad d(v_{\text{п}} - v_{\text{в}}) < 0 \Rightarrow R > r > \frac{2}{5}R;$$

$$v_{\text{п}} > v_{\text{в}} \quad \text{при} \quad d(v_{\text{п}} - v_{\text{в}}) > 0 \Rightarrow 0 < r < \frac{2}{5}R;$$

$$v_{\text{п}} = v_{\text{в}} \quad \text{при} \quad d(v_{\text{п}} - v_{\text{в}}) = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{5}R;$$

Рассмотрим теперь задачу о столкновении бильярдных шаров при различных условиях. Точнее, определим условия, при которых при столкновении движущегося шара с другим (неподвижным) шаром: 1) оба шара стали двигаться вперед (удар с накатом); 2) налетающий шар остановился, а покоящийся стал двигаться вперед; 3) налетающий шар после удара откатился назад (удар с оттяжкой). По-прежнему мы будем пренебрегать силой трения качения шаров как при движении шаров, так и в процессе их взаимодействия. Первый случай реализуется при высоких ударах ($r > 2R/5$), когда шар движется с вращением в сторону движения. При упругом столкновении шары обмениваются поступательными импульсами и второй шар начинает скользить со скоростью первого. При этом сила трения скольжения будет уменьшать скорость поступательного и увеличивать скорость вращательного движений до того момента, до того момента, когда они сравняются и шар покатится. Движущийся шар остановится, но, поскольку он вращался, сила трения скольжения будет продолжать действовать вперед и шар снова начнет двигаться.

Для того, чтобы произвести столкновение шаров типа "удара с оттяжкой", необходимо, чтобы скользящий шар вращался противоположно рассмотренному выше случаю.

Наконец, чтобы реализовать столкновение с остановкой налетающего шара, необходимо, чтобы его поступательная и вращательная скорость после удара одновременно обратились в нуль. На практике это возможно, но теоретическое объяснение в этом случае потребует учета силы трения качения. Следует отметить, что и предыдущих ситуациях учет силы трения качения при столкновениях может привести к существенной модификации решения.

3. Оценки различных составляющих силы трения качения

В этом разделе мы сделаем некоторые простые оценки, обнаруживающие различный характер зависимости силы трения качения от параметров катящейся пары. Традиционными механизмами силы трения качения являются упругий гистерезис, проскальзывание при качении и разрыв адгезионных связей ([8, 9, 10, 11]). В оценках мы будем опираться на упрощенные модели контакта катящейся пары — колеса и плоской горизонтальной поверхности — в ситуациях, которые наилучшим образом выявляют тот или иной механизм.

3.1. Контактная задача теории упругости

Наши количественные оценки силы трения качения независимо от ее механизма будут опираться на решение статической контактной задачи теории упругости [7]. В общей постановке эта задача формулируется следующим образом: найти величины, характеризующие деформацию двух упругих выпуклых тел, сдавливаемых постоянной силой F , в области их контакта (размер и форму площадки контакта, смятие), а также распределение нормальных напряжений в этой области (см. рис. 3.1). Нас будет интересовать частный случай

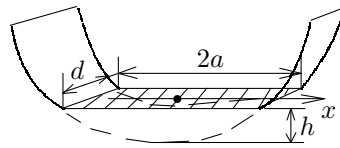


Рис. 3.1. К контактной задаче теории упругости. Площадка контакта и ее характеристики: a — полуширина полосы контакта, d — ширина колеса, h — смятие.

этой задачи когда упруго-пластическое колесо радиуса R прижимается к плоской поверхности. Для некоторого упрощения формул предположим также, что мы имеем дело с "мягким" колесом и "жесткой" поверхностью, так что их модули Юнга удовлетворяют неравенству: $E_{\text{пов.}} \gg E = E_{\text{колеса}}$.

В этом случае общие формулы решения контактной задачи приводят к следующим выражениям для основных характеристик и соотношений вблизи площадки контакта

(она будет представлять собой прямоугольную полосу шириной $2a$):

$$\sigma(x) = \frac{2f}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}; \quad h = \frac{2fD}{\pi} \lim_{b \rightarrow \infty} b \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}; \quad (3.3)$$

$$a = \left(\frac{4DfR}{\pi} \right)^{1/2},$$

где $\sigma(x)$ — распределение нормального к площадке напряжения в зависимости от координаты x (см. рис. 3.1), f — прижимающая сила, отнесенная к единице ширины d колеса, h — смятие, в рассматриваемой ситуации равное высоте кругового сегмента, вжатого внутрь колеса, $D = 3(1 - \nu^2)/4E$, где E — модуль Юнга материала, из которого изготовлено колесо (или, точнее говоря, его обод), ν — коэффициент Пуассона.

3.2. Потери на упругий гистерезис

Явление упругого гистерезиса связано с необратимостью неупругих (пластических) деформаций. Механическая работа, совершаемая при таких деформациях, расходуется на необратимую деформацию кристаллической решетки и рассеивается в тепло. Мы рассмотрим два механизма упругого гистерезиса: *статический* и *динамический*.

3.2.1. Статический гистерезис

Статический гистерезис обусловлен характерным видом диаграммы напряжений упруго-пластических тел, упрощенный вид которой показан на рис. 3.2.

Наклонная часть диаграммы описывает фазу упругих деформаций (*закон Гука*), для которой $\sigma = E\epsilon$, где $E = \sigma_0/\epsilon_0$ — модуль Юнга вещества стержня, ϵ_0 — предел упругости, σ_0 — напряжение пластического течения. Пластическое течение описывается горизонтальной частью диаграммы, на которой деформация возрастает при практически постоянном напряжении. Параметр ϵ_1 характеризует предельную относительную деформацию, при которой материал разрушается. Следует отметить, что диаграмма подобного типа получается в экспериментах с растяжением стержней, т.е. в ситуации т.н. простого

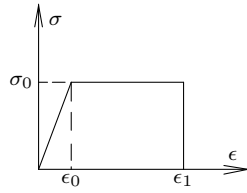


Рис. 3.2: Упрощенная диаграмма напряжений упруго-пластического материала.

напряженного состояния. При качении тел, в области, прилегающей к площадке контакта, возникают напряжения сжатия. Диаграммы напряжений сжатых стержней для большинства материалов практически симметричны диаграммам растяжений в упругой фазе и на некоторой части пластической¹. Согласно приведенной диаграмме, потери на статический упругий гистерезис при качении тел начинаются в момент, когда напряжение на средней линии площадки контакта (оно будет максимально на этой линии, поэтому мы обозначаем его в дальнейшем σ_{\max}), рассчитанное по закону Гука, удовлетворяет неравенству: $\sigma_{\max} = \sigma_0$. В этом случае окрестность средней линии деформируется при качении пластически, т.е. необратимо, а тела при качении сминаются, немного изменяя свои форму и размер.

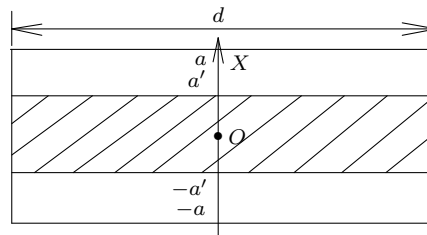


Рис. 3.3: Площадка контакта колеса и поверхности. Заштрихованная полоса — область пластической деформации.

Для оценки будем опираться на модифицированное решение (3.3)

¹Тонкие стержни при достаточно большой сжимающей силе теряют устойчивость.

со следующей зависимостью напряжения от координаты x :

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0, & |x| \leq a'; \\ C\sqrt{1-x^2/a^2}, & a' \leq |x| \leq a. \end{cases} \quad (3.4)$$

Здесь a' — полуширина полосы пластического течения (см. рис. 3.3), которая находится из условия: $\sigma(a') = \sigma_0$, а константа C должна находиться из условия равновесия² колеса в вертикальном направлении:

$$F = d \int_{-a}^a \sigma(x) dx.$$

Исключение константы C с учетом (3.4) приводит к трансцендентному уравнению вида:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = \frac{2\xi}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{2 \arcsin \xi}{\pi \sqrt{1-\xi^2}}, \quad (3.5)$$

где $\xi = a'/a$. При малых значениях ξ , при которых наша оценка имеет большую степень надежности, решение уравнения (3.5) имеет следующий явный вид:

$$a' = a\sqrt{2} \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} - 1 \right)^{1/2}. \quad (3.6)$$

Глубина проникновения пластической фазы внутрь колеса имеет порядок величины a' , а величина относительной пластической деформации $\epsilon \sim a'/R$. Для оценки величины смятия h нет необходимости в вычислении несобственного интеграла в (3.3). Параметры a и b , входящие в него, имеют размерность длины, следовательно переменная интегрирования ξ имеет размерность квадрата длины. Это означает, что все выражение под знаком предела безразмерно. После перехода к пределу $b \rightarrow \infty$ параметр b исчезает, а из одного параметра a невозможно построить безразмерную величину. Следовательно интеграл

²Строго говоря, полуширина полосы контакта a в точной постановке задачи, включающей пластические деформации, должна быть вычислена заново. Мы при оценке считаем ее такой же, как в случае чисто упругой деформации. Такое приближение будет тем точнее, чем меньше отношение a'/a .

от a не зависит и, таким образом, является безразмерной постоянной порядка единицы. Это означает, что $h \sim fD \sim f/E$.

Теперь мы можем оценить механическую работу A_p , затраченную на пластическое смятие в течение времени одного оборота. Она по порядку величины равна:

$$A_p \sim \sigma_0 \epsilon V_p,$$

где $V_p \sim Ra'^2$ — объем пластически смятой области за один оборот (тонкая трубка, примыкающая к середине обода). Подставляя оценку для ϵ и деля A_p на время одного оборота, приходим к выражению для мощности силы трения качения:

$$F_{\text{тр.к.}} v \sim \sigma_0 a'^3 \omega,$$

С учетом кинематической связи $v = \omega R$, получаем выражение для силы трения качения:

$$F_{\text{тр.к.}} \sim \frac{\sigma_0 a'^3}{R}. \quad (3.7)$$

Подставляя сюда выражения (3.6) для a' и (3.3) для a , находим после некоторых упрощений окончательную оценку для силы трения качения в рассматриваемой модели:

$$F_{\text{тр.к.1}} \sim \sigma_0 \left(\frac{f}{E}\right)^{3/2} R^{1/2} \left(\sqrt{\frac{2fE}{3\pi(1-\nu^2)\sigma_0^2 R}} - 1\right)^{3/2}. \quad (3.8)$$

3.2.2. Динамический гистерезис.

Механизм динамического гистерезиса предполагает, что в процессе качения колеса в области смятия действуют внутренние диссипативные силы, родственные силам вязкого трения в жидкости. Мгновенную мощность этих сил можно оценить как

$$\eta \dot{\epsilon}^2 V_{\text{см}}, \quad (3.9)$$

где η — коэффициент вязкости, $\dot{\epsilon}$ — скорость деформации, $V_{\text{см}}$ — объем области смятия. Скорость деформации можно оценить как отношение характерной относительной деформации h/R ко времени ее

совершения, равному ω/α , где ω — угловая скорость вращения колеса, $\alpha \sim a/R$ — угол, стягивающий хорду контакта (см. рис. 3.4). Объем $V_{\text{см}} \sim d \cdot R^{1/2} h^{3/2}$ из геометрических соображений. Подставляя все в (3.9) и приравнявая получившееся выражение мощности силы трения качения $F_{\text{тр.к.}}$, находим (после подстановок $h \sim f/E$, $a \sim fR/E$ и упрощений):

$$F_{\text{тр.к.2}} \sim \eta v d \left(\frac{f}{ER} \right)^{5/2}. \quad (3.10)$$

3.3. Механизм проскальзывания

При качении колеса части его обода непрерывно попадают на площадку контакта и выходят из нее. Нетрудно заметить (см. рис. 3.4), что при этом на площадке контакта с необходимостью возникает проскальзывание элементов обода относительно элементов поверхности, поскольку длина смятой части обода всегда меньше длины той же части в недеформированном состоянии.

Для количественных оценок подсчитаем сначала среднюю линейную относительную деформацию ϵ смятой части обода. Она равна разности длин деформированного элемента обода и недеформированного, отнесенной к длине недеформированного элемента:

$$\epsilon = \frac{2R \sin(\alpha/2) - R\alpha}{R\alpha} \approx -\frac{\alpha^2}{24},$$

где α — малый угол, стягивающий хорду контакта (см. рис. 3.4).

Пусть теперь колесо в процессе качения по поверхности поворачивается из некоторого положения на угол $\Delta\varphi$. При этом недеформированный элемент обода $R\Delta\varphi$ заходит на площадку контакта и такой же элемент выходит из нее. Оба процесса сопровождаются изменением длины этих элементов на величину $R\Delta\varphi\epsilon$. Поскольку это изменение происходит при действии нормальной прижимающей силы на площадке контакта, то при наличии коэффициента трения μ затрачивается энергия на работу против сил трения скольжения:

$$\Delta A \sim \mu F R \epsilon \Delta\varphi.$$

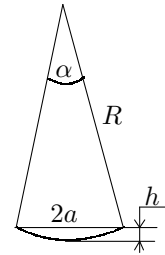


Рис. 3.4. К механизму проскальзывания

Относя эту работу к интервалу времени Δt , за который колесо повернулось на угол $\Delta\varphi$, получаем выражение для мощности потерь энергии:

$$W \sim \mu F \omega R \alpha^2.$$

Приравнивая это выражение мощности силы трения качения $F_{\text{тр.к.}} v$ и подставляя $\alpha \approx a/R$, приходим после некоторых упрощающих преобразований к окончательной оценке:

$$F_{\text{тр.к.}} \sim \frac{\mu F^2}{R E d}. \quad (3.11)$$

3.4. Механизм разрыва адгезионных связей

Рассмотрим следующую модель образования адгезионных (склеивающих) связей на площадке контакта.

1. Адгезионные связи имеют атомно-молекулярную природу и обусловлены универсальными элементарными связями, образующимися на уровне атомов или молекул, из которых состоят колесо и поверхность.
2. Элементарная адгезионная связь характеризуется универсальной энергией связи u_0 .
3. Число связей, образующихся на единичной площади контакта, пропорционально нормальному напряжению на этой площади:

$$\frac{dN}{dS} = k \sigma_n,$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности.

В рамках этой модели подсчитаем работу по разрыву связей, совершаемую при одном обороте колеса. Эта работа A равна произведению числа связей N_0 , разорванных в течении одного оборота на энергию разрыва u_0 . Число N_0 , в свою очередь, согласно п.3 нашей модели, пропорционально площади боковой поверхности колеса и среднему нормальному напряжению на площадке контакта:

$$N_0 = k \sigma_{\text{ср.}} 2\pi R d = 2\pi k F R / h.$$

Разделив работу A на время одного оборота и приравнивая получившееся выражение мощности силы трения качения, находим:

$$F_{\text{тр.к.4}} \sim \lambda E d, \quad (3.12)$$

где $\lambda = k u_0$ — молекулярная константа, имеющая размерность длины.

4. Обсуждение результатов

Полученные оценки наглядно иллюстрируют тот факт, что за простым термином "сила трения качения" могут стоять довольно сложные и весьма различные по своей физической природе механизмы диссипации энергии. Во всех случаях мы, в рамках принятого механизма, независимо вычисляли мощность диссипации энергии при движении колеса и приравнивали ее мощности формальной "силы трения качения": $F_{\text{тр.к.}v}$. Этот прием переводит сложную картину явлений, сопровождающих качение колеса, на привычный нам язык сил. В отличие от более простых сил, сила трения качения существенно зависит от большого числа факторов, в том числе и от динамических условий качения (свободное или вынужденное качение, область приложения крутящего момента и т.д.), которые обсуждались ранее.

Рассмотренные нами конкретные механизмы и количественные оценки

не исчерпывают полной картины качения. Тем не менее, с их помощью можно анализировать характер силы трения качения в большом числе практически важных экспериментальных ситуаций. Обсудим некоторые характерные свойства полученных оценок. Как нетрудно видеть, сила трения качения $F_{\text{тр.к.1}}$, обусловленная механизмом статического гистерезиса, как это и следовало ожидать, не зависит от

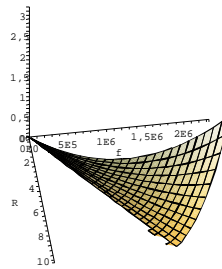
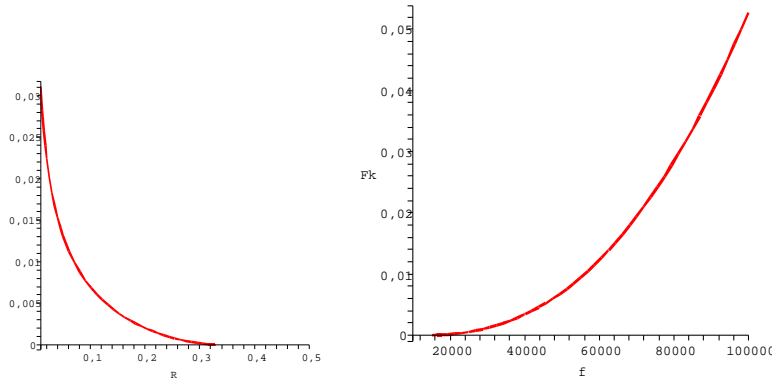


Рис. 4.1. Пространственный график зависимости $F_{\text{тр.к.}}(f, R)$ для колеса, изготовленного из алюминия. Поверхность графика пересекает плоскость (f, R) по прямой $f \approx 152126R$. В области между этой прямой и осью OR сила трения качения отсутствует.

характеристик скорости движения колеса. Зависимость силы трения качения имеет ступенчатый характер: при условии

$$\Theta \equiv \frac{2fE}{3\pi(1-\nu^2)\sigma_0^2 R} < 1, \quad (4.13)$$

она равна нулю, поскольку при таком условии максимальное напряжение на площадке контакта меньше напряжения пластического течения. При постепенном увеличении нагрузки неравенство (4.13) переходит в равенство, а затем в обратное неравенство: $\Theta > 1$. При этом сила трения качения "включается" и нарастает. В окрестности области $\Theta = 1$ зависимость $F_{\text{тр.к.1}}(f, R)$ неаналитична. Ее пространственный график и его характерные сечения для алюминиевого ($E = 70\text{ГПа}$, $\sigma_0 = 50\text{МПа}$, $\nu = 0.31$) колеса показаны на рис. 4.1.



Характерные сечения предыдущего графика. Первая зависимость построена при $f = 5 \cdot 10^4 \text{Н/м}$, вторая — при $R = 10 \text{см}$. Вдали от значений f, R , при которых $F_{\text{тр.к.}}$ обращается в нуль, зависимости выходят за пределы области применимости рассматриваемой модели.

Оценка (3.10) для силы трения качения, обусловленной динамическим гистерезисом материала колеса, напротив, указывает на прямо пропорциональную зависимость от скорости. Полагая в формуле (3.12) $\lambda \sim 10^{-10} \text{м}$ (атомные масштабы), $E \sim 10^{11} \text{Па}$, $d \sim 1 \text{см}$, находим: $F_{\text{тр.к.4}} \sim 0.1 \text{Н}$ — разумный порядок величины.

В общем случае сила трения качения обусловлена всеми четырьмя механизмами:

$$F_{\text{тр.к.}} = F_{\text{тр.к.1}} + F_{\text{тр.к.2}} + F_{\text{тр.к.3}} + F_{\text{тр.к.4}}. \quad (4.14)$$

Чтобы выяснить относительную роль каждого из слагаемых в обычных условиях свободного качения, будем выражать результирующую силу трения качения в единицах $\sigma_0(f/E)^{3/2}R^{1/2}$, а в качестве прижимающей силы F возьмем собственный вес сплошного цилиндрического колеса. Тогда после некоторых элементарных преобразований, приходим к следующей оценке:

$$\frac{F_{\text{тр.к.}}}{(g/c^2)^{3/2} R^{7/2} \sigma_0} \sim \left[(\sqrt{\Theta} - 1)^{3/2} + \frac{\eta v d}{\sigma_0 R} \frac{g}{c^2} + \frac{\mu c \rho d}{\sigma_0} \sqrt{\frac{g}{R}} + \frac{\lambda d \rho c^5}{\sigma_0 g^{3/2} R^{7/2}} \right], \quad (4.15)$$

где ρ — плотность вещества цилиндра, $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в веществе колеса, g — ускорение свободного падения. Для определенности рассмотрим сплошной алюминиевый цилиндр ($E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\sigma_0 = 5 \cdot 10^5$ Па, $\eta \sim 10^{-2}$ Па · с, а также $g = 9.8$ м/с², $\lambda \sim 10^{-10}$ м). Подстановка характеристик алюминия приводит к следующей оценочной формуле:

$$\frac{F_{\text{тр.к.}}}{10^{-2} R^{7/2}} \sim \left[(\sqrt{0.54 R d} - 1)^{3/2} + 10^{-12} \frac{v d}{R} + 10^{-1} \frac{d}{R^{1/2}} + 10^3 \frac{d}{R^{7/2}} \right]. \quad (4.16)$$

Слагаемые в квадратных скобках безразмерны и соответствуют в порядке следования слагаемым в формуле (4.14), а геометрические характеристики колеса R, d и скорость качения v измеряются в м и м/с соответственно. Выясним соотношения безразмерных слагаемых друг с другом и их зависимость от параметров R, d и v .

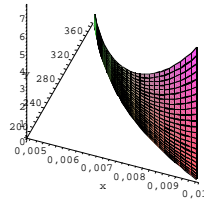


Рис. 4.2. Фрагмент зависимости $v = 10^{12} (R/d)(\sqrt{0.54Rd}-1)^{3/2}$, выражающей равенство вкладов механизмов статического и динамического гистерезиса в силу трения качения. Из графика видно, что разумные скорости ($\sim 10^1$ м/с) получаются для цилиндров, имеющих вид длинной тонкой проволоки.

Эти оценки показывают, что для всех разумных (макроскопических) размеров катящегося цилиндра, вкладом вязкости в силу трения качения можно пренебречь по сравнению с вкладами проскальзывания и разрыва связей. График на рис. 4.2, изображающий фрагмент зависимости скорости от $R = x$ и $d = y$ при условии, что второе слагаемое в (4.16) имеет порядок величины первого, наглядно иллюстрирует тот же вывод о малости вклада вязкости по отношению к механизму статического гистерезиса.

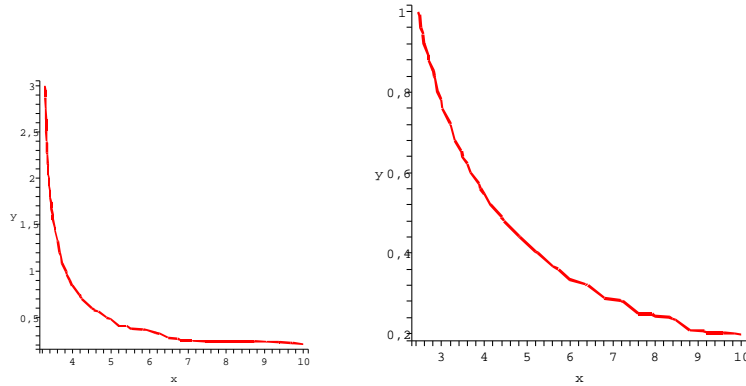
Таким образом при качении алюминиевого (и вообще жесткого) цилиндра вкладом в силу трения качения механизма вязкости можно полностью пренебречь.

Аналогично, приравнявая третье и четвертое слагаемое в (4.16), приходим к выводу, что вклад проскальзывания начинает доминировать над механизмом разрыва связей, начиная с $R \gtrsim 10$ м. Соотношение вкладов статического гистерезиса и разрыва связей демонстрируется графиком на первом рисунке.

Приравнивание второго слагаемого к третьему и четвертому позволяет получить значения скоростей, при которых вклад вязкого трения сравнимается со вкладами трения скольжения и адгезии:

$$v_1 \sim 10^{11} R^{1/2}; \quad v_2 \sim 10^{15} / R^{5/2}.$$

Эти оценки показывают, что для всех разумных (макроскопических) размеров катящегося цилиндра, вкладом вязкости в силу трения качения можно пренебречь по сравнению с вкладами проскальзывания и разрыва связей. График на рис. 4.2, изображающий фрагмент зависимости скорости от $R = x$ и $d = y$ при условии, что второе слагаемое в (4.16) имеет порядок величины первого, наглядно иллюстрирует тот же вывод о малости вклада вязкости по отношению к механизму статического гистерезиса.



(1) Фрагмент зависимости $10^3 d^2 = R^7(\sqrt{0.54Rd} - 1)^3$ ($x = R$, $y = d$), выражающей равенство вкладов механизмов статического гистерезиса и разрыва связей в силу трения качения. В области выше графика доминирует первый механизм. Большинство практически важных ситуаций относится к области ниже графика. (2) Фрагмент зависимости $d^2 = 100R(\sqrt{0.54Rd} - 1)^3$ ($x = R$, $y = d$), выражающей равенство вкладов механизмов статического гистерезиса и проскальзывания в силу трения качения. В области выше графика доминирует первый механизм.

Таким образом, в обычных условиях разрыв адгезионных связей при качении является определяющим механизмом диссипации энергии.

Обратное соотношение роли механизмов наблюдается в области параметров $R \gtrsim 10\text{м}$, $d \gtrsim 0.1\text{м}$. Рассмотрим в этой области соотношение механизмов статического гистерезиса и проскальзывания. График, представленный на втором рисунке, показывает, что в этой области доминирует механизм гистерезиса.

Отметим в заключение, что наши простые оценки для большого числа ситуаций качественно согласуются с зависимостями, представленными в литературе на основе имеющихся экспериментальных данных [8, 9, 10, 11].

Литература

- [1] Богданов К.Ю., *Газета "1 сентября" (Физика)* N21, 2005.
- [2] Севрюков П.Ф., *Газета "1 сентября" (Физика)* N23, 2005.
- [3] Сивухин Д.В., *Общий курс физики (Механика)*, М., Наука, 1989.
- [4] Стрелков П.С., *Механика* М., Наука, 1975.
- [5] Хайкин С.Э., *Механика* М., ОГИЗ, 1947.
- [6] Джанколи Д., *Физика (т.1)* М., Мир, 1989.
- [7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Курс теоретической физики (т. VII Теория упругости)* М., Наука, 1989.
- [8] Григорьев С., Мейзлихов Е.З., *Физические величины (справочник)* М., Энергоиздат, 1991.
- [9] *Физическая энциклопедия* М., Наука, 2000.
- [10] Мур Д., *Основы и применение трибоники* М., Мир, 1978.
- [11] Силин А.А., Карагиоз О.В., Маркачов В.В., Измайлов В.П. *Трение и износ* 1980, т.1, N6, с.957-964.