Некоммерческое Партнерство
Региональный Научно-Образовательный Центр
"Логос"

Векторы в физике

2009–2010 учебный год

Ярославль 2009

Оглавление

Задача 5. [3+4 баллов] Вычислить координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 3$ и
1. углы между ним и осями Ox, Oy, Oz равны $45^o, 45^o, 30^o$ соответственно;
2. те же углы, но между вектором $\vec{a}$ и координатными плоскостями (yz), (xz) и (xy) соответственно.

Задача 6. [6 баллов] С берега реки перпендикулярно течению брошен камень, который падает на расстоянии $h = 10$ м от берега. Скорость течения реки $v = 10\,/$, скорость поверхностных волн $c = 15$ км/ч. Через какое время волна, возникшая на месте падения камня, придет в точку бросания?

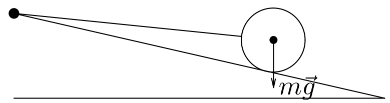


Рис. 9.2

Задача 7. [4 балла] Гладкий шар закреплен на нити на гладкой наклонной плоскости и находится в равновесии, как показано на рис. 9.2. Сила тяжести $m\vec{g}$ в некотором масштабе показана стрелкой. Найти графически силу натяжения $\vec{T}$ и силу нормальной реакции $\vec{N}$ наклонной плоскости.

Задача 8. [4 балла] Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 120^o$, причем $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 5$. Определить $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Задача 9. [8 баллов] Определить при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \beta\vec{e}_z$ и $\vec{b} = \alpha\vec{e}_x - 6\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ коллинеарны?

Задача 10. [5 баллов] Десять шариков, массы которых соответственно равны 1 , 2 , . . ., 10 , укреплены на невесомом стержне длиной 90 так, что между центрами двух соседних шариков расстояние равно 10 . Найдите положение центра тяжести системы.

Авторы:	Кокарев Сергей Сергеевич
Составители:	Турунтаев Сергей Викторович
Заказ №:	312
Тираж:	50шт.
Оформление и издание:	НП РНОЦ "Логос"

Вопрос 10. [3 балла] Почему можно скалярно умножать векторы, имеющие разные физические размерности, но нельзя складывать?

9. Задачи

Задача 1. [3+4 баллов] Для векторов, изображенных на рис. 9.1,

1. построить вектор $3(\vec{a}-\vec{b}+\vec{d})+2(\vec{c}-2\vec{d}+2\vec{a})-5(\vec{a}-\vec{d}+\alpha\vec{c})$ графически при $\alpha=1$;

Рис. 9.1

2. при каком значении параметра α результирующий вектор будет иметь вертикальное (относительно листа) направление?

Задача 2. [5 баллов] Катер держит курс перпендикулярно берегу реки, скорость течения которой $v = 5$ км/ч. Скорость катера относительно неподвижной воды $u = 10$ км/ч. С какой скоростью и куда будет двигаться катер в системе отсчета, связанной с человеком, спускающимся с моста по тросу со скоростью $w = 5$ км/ч вертикально вниз?

Задача 3. [1+2+3 баллов] Лебедь, рак и щука тянут воз с силами $\vec{F}_{\text{л}} = (0,1,1)$, $\vec{F}_{\text{р}} = (1,1,0)$ и $\vec{F}_{\text{щ}} = (1,0,-1)$.

1. Будет ли воз и "ныне там"?

2. Найдите углы между равнодействующими всевозможных пар сил и вектором силы соответствующего третьего персонажа (всего — 3 угла).

3. Сможет ли черепаха поправить дело так, чтобы все было как в басне Крылова ("а воз и ныне там")?

Задача 4. [1+1+1+3+4 баллов] Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\pi/6$. Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, найти: **1.** $(\vec{a}+\vec{b})^2$; **2.** $(\vec{a}-\vec{b})^2$; **3.** $(2\vec{a}-3\vec{b})^2$; **4.** угол между векторами $\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-2\vec{b}$; **5.** Значение параметра λ, при котором векторы $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ и $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ образуют угол $\pi/6$.

1. Аннотация

Данное методическое пособие открывает серию "Элементы математики для физиков". Аппарат векторной алгебры, необходимый для решения многих задач по кинематике и динамике, изложен простым языком с соблюдением приемлемого для физики уровня строгости. В пособии разбираются темы "Линейные операции с векторами", "Скалярное произведение векторов"и "Операции с векторами в декартовой системе координат". Разбираемый материал проиллюстрирован достаточным числом математических и физических задач. Пособие рекомендуется учащимся 9-11 классов.

Пособие рекомендовано учащимся 9–11-х классов.

2. Математический минимум

Необходимо уметь:

- Производить простейшие геометрические построения (треугольники, параллелограммы, параллельный перенос отрезков и т.д.) Производить арифметические операции с числами.
- Решать системы уравнений методом исключения неизвестных.

Необходимо знать:

- Основные формулы тригонометрии.
- Теорему синусов и косинусов;
- Формулу для синуса и тангенса малых углов: $\sin\alpha|_{\alpha\ll 1} \approx \operatorname{tg}\alpha|_{\alpha\ll 1} \approx \alpha$, где α выражен в радианах.

3. Линейные операции над векторами

3.1. Скаляры и 3-мерные векторы

Величины, с которыми работает физик при описании природных явлений, имеют самый различный характер: числа, наборы чисел, всевозможные числовые таблицы. Число выступает как единая математическая основа для всех величин. Оказывается, что целый ряд физических величин описывается только одним числом, например, масса, энергия, температура, заряд. Такие величины носят название ***скаляров.*** Скаляры, описывающие одну и ту же величину, как правило, можно складывать и вычитать по обычным правилам сложения чисел, например $m = m_1 + m_2$.

Между тем, для определения многих физических величин, задание одного числа недостаточно. Например, выражение: "Автомобиль движется со скоростью 50 км/ч — содержит лишь часть информации, заложенной в понятие скорости, так как ничего не говорит нам о том, куда движется автомобиль. Такие величины, которые для своего определения требуют помимо числа (абсолютной величины) еще и задание направления, как правило, являются ***векторами.*** Другими примерами векторов являются перемещение, ускорение, импульс, сила и т.д. Более строгие определения скаляров и векторов мы дадим в разделе "Декартова система координат".

При произвольном движении материальной точки для его полного описания необходимо задание трех компонент вектора скорости. То же справедливо, в общем случае, и для любого другого вектора. Говорят, что мы имеем дело с ***трехмерными векторами.*** Трехмерность векторных величин обусловлена, в конечном счете, ***трехмерностью*** нашего ***пространства.*** Обратите внимание, что для скалярных величин их числовое описание не зависит от размерности пространства.

Чрезвычайно эффективным средством для получения и формулировки физических соотношений и законов является математический аппарат векторной алгебры[1]. Напомним, что для многих физических задач интуитивное представление о векторе, как направленном отрезке, длина которого изображает в некотором масштабе его абсолютную величину, является достаточным, хотя это всего лишь наглядная геометрическая иллюстрация, позволяющая, кроме того, графически производить основные алгебраические операции. Далее мы будем активно пользоваться геометрическим образом вектора как ***направленного отрезка*** или, что то же самое, ***упорядоченной пары точек.***

В физике за каждым вектором закрепилось соответствующее бук-

[1] Под алгеброй здесь понимается совокупность операций над векторами и их свойств, с помощью которых можно из одних векторов получать другие, например операция сложения векторов и ее свойства.

8. Вопросы

Вопрос 1. [1 балл] Приведите примеры скалярных и векторных величин, уже встречавшихся вам в курсе физики. Объясните, почему вы относите эти величины к тому или иному классу.

Вопрос 2. [3 балла] РНОЦ "Логос" каждый год отправляет n писем в с. Закобякино Любимского района Ярославской области. Таким образом, это число писем имеет определенную величину и направление. Можно ли считать эту величину вектором?

Вопрос 3. [3 балла] Дайте определение системы координат. Приведите свой пример системы координат (отличной от декартовой), удовлетворяющий определению.

Вопрос 4. [1 балл] Почему величина скалярного произведения не зависит от выбора системы координат?

Вопрос 5. [2 балла] Является ли средняя скорость вектором? Почему?

Вопрос 6. [2 балла] Какое из приводимых ниже высказываний ошибочно? Почему?
1) Вектор $3\vec{a}$ в 3 раза больше чем $\vec{a}$?
2) Вектор $\vec{b}$ в два раза меньше $\vec{a}$?
3) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — коллинеарны, то $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — тоже коллинеарны;
4) Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — неколлинеарны, то $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — неколлинеарны;
5) Сила трения скольжения в μ раз больше силы реакции.

Вопрос 7. [1 балл] Чем система отсчёта отличается от системы координат?

Вопрос 8. [2 балла] Дайте определение равнодействующей сил, составляющей и проекции? Какие из этих величин скаляры, а какие векторы?

Вопрос 9. [1 балл] Верно ли утверждение: если $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$? Верно ли обратное?

Его свойства:
свойство коммутативности

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a});$$

свойство линейности

$$(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{c}) = \lambda(\vec{a},\vec{c}) + \mu(\vec{b},\vec{c});$$

Если $(\vec{a},\vec{b}) = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$. При этом считается, что нулевой вектор перпендикулярен всем векторам (свойство ортогональности);

$$(\vec{a},\vec{a}) \geq 0,$$

причем равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда $\vec{a} = 0$ (свойство евклидовости).

6. Формула связи скалярного произведения с абсолютной величиной вектора:
$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$$
и с углом между векторами:
$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}\sqrt{(\vec{b},\vec{b})}}.$$

7. Координатное выражение для линейных операций над векторами:
сумма векторов
$$\vec{a}+\vec{b} = (a_x+b_x)\vec{e}_x + (a_y+b_y)\vec{e}_y + (a_z+b_z)\vec{e}_z,$$
$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{e}_x + \lambda a_y\vec{e}_y + \lambda a_z\vec{e}_z$$

8. Координатное выражение для скалярного произведения:
$$(\vec{a},\vec{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

венное обозначение, например $\vec{F}$ — для силы, $\vec{a}$ — для ускорения и т.д. Для изучения общих свойств векторов мы будем использовать "безличную"математическую систему обозначения векторов — либо маленькие латинские буквы со стрелками — $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, либо пары больших латинских в порядке от начала к концу — $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$.

3.2. Умножение вектора на число

Простейшая операция, которую можно произвести над вектором – это умножить его на некоторое вещественное число λ. Как при этом изменится первоначальный вектор? Независимо от значения λ, результирующий вектор будет лежать на той же прямой, что и первоначальный. Далее, всю область значений λ (т.е. всю вещественную ось) удобно разбить точками $-1,\ 0,\ 1$ на четыре области. Результат умножения вектора на число будет зависеть от того, в какой области находится λ. Разберем по очереди все случаи:

1. $1 < \lambda < \infty$. В этом случае вектор, сохраняя свое направление, "растягивается"в λ раз, или, более строго, в λ раз увеличивается его абсолютная величина.

2. $\lambda = 1$. Это тождественная операция, которая никак не изменяет вектора.

3. $0 < \lambda < 1$. Здесь, как и в первом случае, направление вектора не изменяется, а абсолютная величина уменьшается в $1/\lambda$ раз. Например, если $\lambda = 1/2$, то вектор "сжимается"в $1/\lambda = 2$ раза.

4. $\lambda = 0$. Умножение любого вектора на ноль в результате дает нулевой вектор, который изображается точкой. Он имеет нулевую длину и неопределенное направление.

5. $-1 < \lambda < 0$. В этом случае, как и в третьем, происходит сжатие вектора в $1/\lambda$ раз, но одновременно с этим вектор "переворачивается"в противоположную сторону. Знак "$-$ "как раз и обозначает смену направления на противоположное.

6. $\lambda = -1$. Вектор "переворачивается"без изменения абсолютной величины.

7. $-\infty < \lambda < -1$. Вектор меняет направление на противоположное и одновременно растягивается в λ раз.

Все перечисленные правила умножения вектора на число собраны в таблице на рис. 3.1. Исходный вектор находится в колонке с $\lambda = 1$.

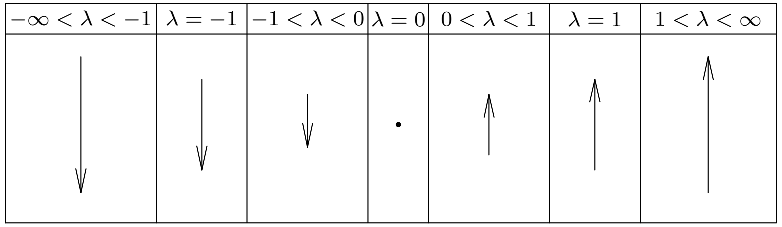


Рис. 3.1

Следующее свойство операции умножения на число вполне очевидно:

1. $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$.

Оно называется ***свойством коммутативности*** умножения вектора на число.

В геометрии векторы, связанные операцией умножения на число, принято называть ***коллинеарными***. Так, все векторы, изображенные в таблице 1 — коллинеарны. В физике умножение вектора на число тесным образом связано с использованием системы единиц физических величин. Пусть, например, у нас имеется сила $\vec{f}$, которая приложена к некоторому телу в некотором направлении, равная по абсолютной величине 1Н, т.е. выступающая как эталон силы в системе СИ. Тогда операция умножения на число позволяет любую произвольную силу $\vec{F}$ выразить через эталонную: $\vec{F} = \lambda\vec{f}$, где λ будет числом эталонных единиц силы — Ньютонов. То же справедливо для любой размерной векторной физической величины.

Другой пример умножения векторов на число — это умножение векторных величин на скалярные, которое встречается в определении различных физических величин и в формулировке физических законов. Например, определение импульса материальной точки: $\vec{p} = m\vec{v}$, или второй закон Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a}$. В обоих приведенных примерах масса (скаляр) умножается на некоторый вектор. Поскольку масса имеет свою физическую размерность, то бессмысленно говорить, например, что вектор импульса в m раз длиннее вектора скорости, так

свойство коммутативности сложения

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

свойство ассоциативности сложения

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c});$$

свойство дистрибутивности сложения векторов относительно умножения на число

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b};$$

свойство дистрибутивности сложения чисел относительно умножения на вектор

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$$

2. Законы относительного движения:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'; \quad \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'.$$

3. Определение равнодействующей N сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \ldots \vec{F}_N$$

и условие равновесия материальной точки:

$$\vec{R} = 0.$$

4. Основные типы сил в механике:
сила тяжести

$$\vec{F} = m\vec{g};$$

сила реакции опоры и сила натяжения нити $\vec{N}, \vec{T}$;
сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр. покоя}}$ и сила трения скольжения:

$$F_{\text{тр. скольжения}} = \mu N;$$

5. Скалярное произведение и его различные формы записи:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi| = \vec{a}|_{\vec{a}}\vec{b} = \pm|\vec{a}| \cdot |\vec{b}'| = |\vec{b}|_{\vec{b}}\vec{a} = \pm|\vec{b}| \cdot |\vec{a}'|;$$

4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. — М: ГИФМЛ, 1958.

5. Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, т.1, (Гл.11. Векторы). М., Мир, 1965.

6. Хайкин С.Э. Физические основы механики. — М: ГИФМЛ, 1962.

7. Кокарев С.С. Векторы в физике, Ярославль, Логос, 2005.

Книги [1]-[2] — учебники по физике. С помощью первого можно освежить в голове имеющиеся знания, второй — позволит вам значительно углубить их, не выходя существенно за рамки школьного курса. Книга [3] — полезное справочное пособие, в котором рассматриваются методы решения некоторых задач школьной программы методами векторной алгебры (§4, Гл.13). Книга [4] — вузовский сборник задач, в котором часть задач, после освоения вами нашего пособия, стала вам уже вполне по силам. [5] — первый том знаменитого курса Фейнмановских Лекций по Физике (ФЛФ), изучаемого в физических ВУЗах всего мира, в 11 главе которой простым языком излагается совсем непростой вопрос о соотношении математики и физики, о симметрии физических законов и о наших векторах. Непонятные обозначения и слова можно пока опустить и вернуться к ним при случае позже. Книгу [6] можно использовать как источник дополнительной информации по силам в природе. Книга [7] представляет собой существенно расширенное и углубленное изложение материала настоящего пособия.

7. Основные формулы по теме

1. Линейные операции с векторами:
   умножение вектора на число
   $$\vec{b} = \lambda\vec{a},$$
   сумма векторов
   $$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$
   Их основные свойства:
   свойство коммутативности умножения на число
   $$\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a});$$

как само значение множителя m зависит от выбора системы единиц и векторы импульса и скорости имеют разный физический смысл. Приведенные соотношения означают лишь, что векторы в приведенных равенствах слева и справа коллинеарны.

3.3. Сложение векторов

В физических задачах часто возникает необходимость сложить два или несколько векторов, соответствующих одной и той же физической величине, например силе: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Математическая операция сложения векторов отражает физический ***принцип суперпозиции***, согласно которому **результат действия совокупности источников векторной величины** (например, силы) **равен векторной сумме воздействий каждого источника по отдельности**. Заметим сразу, что сложение векторов не сводится к сложению их абсолютных величин. Векторы должны складываться ***векторно***. В этом параграфе мы рассмотрим графическое сложение векторов.

Графически векторы можно складывать по "правилу параллелограмма"или по "правилу треугольника", в зависимости от того, какой способ для данной задачи удобнее.

1) ***Правило параллелограмма.*** Процедура сложения изображена на рис. 3.2. Векторы параллельно переносятся так, чтобы они исходили из одного начала, затем на них строится параллелограмм и вектор суммы изображается его диагональю.

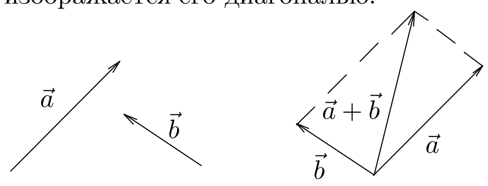


Рис. 3.2

2) ***Правило треугольника.*** Процедура сложения изображена на рис. 3.3.

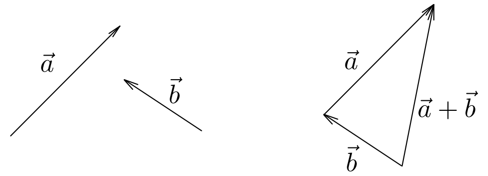


Рис. 3.3

Векторы располагаются так, чтобы конец одного из них совпадал с началом другого (неважно в каком порядке), затем начало первого соединяется с концом второго. Полученный вектор и будет изображать сумму исходных векторов. Легко убедиться, что результат не зависит от применяемого способа.

Непосредственно применяя описанные правила, можно установить справедливость следующих свойств операции сложения векторов:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — свойство ***коммутативности*** сложения;
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — свойство ***ассоциативности*** сложения;
3. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ — свойство ***дистрибутивности сложения векторов относительно умножения на число***;
4. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ — свойство ***дистрибутивности сложения чисел относительно умножения на вектор***.

Зная, как складываются два вектора, легко произвести сложение любого числа векторов. Можно параллельно перенести все векторы в одну точку и складывать их последовательно по правилу параллелограмма: сначала сложить два произвольно выбранных, затем к результату прибавить третий и так далее (рис. 3.4).

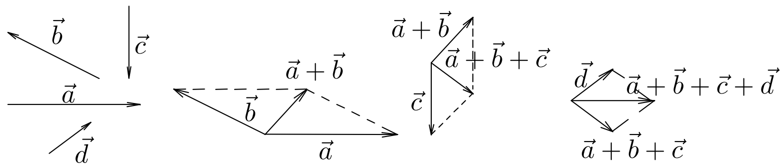


Рис. 3.4

Однако практически удобнее применить

3)***Правило многоугольника.*** К концу произвольно выбранного первого вектора (рис. 3.5) нужно параллельно перенести произвольно выбранный второй, к его концу — третий и т.д. Результирующий вектор будет соединять начало первого и конец последнего векторов.

без изменения состояния физической системы.[6] В настоящем пособии мы имеем дело с векторами, которые можно считать свободными. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 8. Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

Решение. Обозначим искомый угол через φ. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ имеет вид: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\varphi$. Отсюда $\cos\varphi=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}/(|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|)$.

Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA}=3\vec{e}_x+4\vec{e}_z;\quad \overrightarrow{BC}=7\vec{e}_x+\vec{e}_z,$$

их абсолютные величины и скалярное произведение:

$$|\overrightarrow{BA}|=5;\quad |\overrightarrow{BC}|=5\sqrt{2};\quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=25.$$

Подставляя все это в формулу для косинуса получаем:

$$\cos\varphi=\frac{25}{5\cdot5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

или $\varphi=45^o$. ▲

6. Рекомендуемая литература

1. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика: Учебник для 8 класса. — М: Просвещение, 1982. — 224 с.: ил.
2. Физика: Механика: 9кл.: Учеб. для углублённого изучения физики; Под ред. Г.Я. Мякишева. – М: Дрофа, 1996. – 496 с.:ил.
3. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочное пособие по методам решения задач по математике (для средней школы). М., Наука, 1984.

[6] Попробуйте открыть дверь сначала за ручку, а потом прикладывая по модулю и направлению ту же силу вблизи петель. Вывод: сила, вращающая дверь – вектор несвободный

ния на число в координатном представлении. Действительно, сумма двух произвольных векторов

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z; \quad \vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z$$

приводится в декартовых координатах к виду

$$\vec{a} + \vec{b} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z + b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z =$$

$$(a_x + b_x)\vec{e}_x + (a_y + b_y)\vec{e}_y + (a_z + b_z)\vec{e}_z.$$

Таким образом, **операция суммы векторов в декартовых координатах**[5] **сводится к сложению соответствующих координат.** Нетрудно убедиться, что **операция умножения вектора на число сводится к умножение на это число его координат.**

Перейдем к скалярному произведению векторов в координатах. В силу своей единичности и взаимной перпендикулярности векторы $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ удовлетворяют соотношениям:

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_x) = (\vec{e}_y, \vec{e}_y) = (\vec{e}_z, \vec{e}_z) = 1; \quad (\vec{e}_x, \vec{e}_y) = (\vec{e}_x, \vec{e}_z) = (\vec{e}_y, \vec{e}_z) = 0.$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$ и $\vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z$ приводится поэтому к простому и хорошо знакомому виду (докажите это):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

Часто в физических и геометрических задачах даются координаты точек начала и конца вектора, например $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Фактически, тем самым задаются два радиус вектора $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ (рис.5.4 б). Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ можно найти, как это видно из рисунка, взяв разность $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, или, что то же самое, из координат конца вектора вычесть координаты начала.

Отметим здесь же, что в евклидовой геометрии два сонаправленных вектора одинаковой длины считаются равными, даже если их начала расположены в разных точках пространства. В физике это справедливо только в случае, так называемых, ***свободных*** векторов, т.е. векторов, которые можно параллельно переносить в пространстве

[5]На самом деле и в любых других.

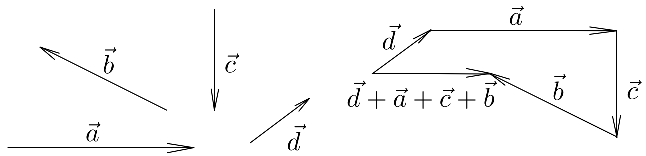


Рис. 3.5

Введенные операции умножения вектора на число и сложения векторов позволяют определить ***операцию вычитания векторов***. Именно, для разности $\vec{c}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + ((-1) \cdot \vec{b}),$$

которая показывает, что операция вычитания сводится к операции сложения и умножению на число -1. Сначала из вектора $\vec{b}$ строится вектор $-\vec{b}$, затем он складывается с вектором $\vec{a}$ (рис. 3.6).

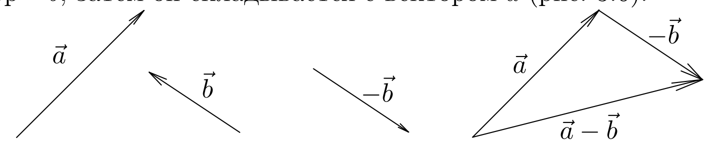


Рис. 3.6

Практически удобнее использовать тот факт, что разность $\vec{c}$ есть такой вектор, который будучи сложен с $\vec{b}$, даст вектор $\vec{a}$. Если привести векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к одному началу, то разность $\vec{c}$ соединяет концы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от $\vec{b}$ к $\vec{a}$, так что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. (рис. 3.7).

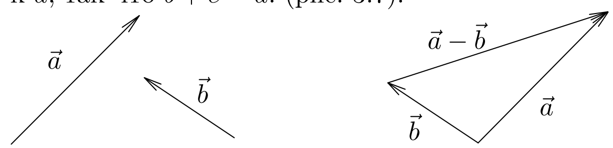


Рис. 3.7

С помощью сформулированных выше алгебраических свойств введенных операций можно упрощать различные векторные выражения.

Пример 1. Построить вектор $2(\vec{a} + 3\vec{b}) - 4(2\vec{c} + 3\vec{d} - \vec{a}) + 2(6\vec{d} - 2\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c})$ (рис. 3.8).

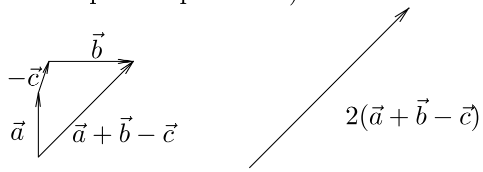
Рис. 3.8

Решение. Прежде, чем выполнять геометрическое сложение целесообразно упростить данное выражение:

$$2(\vec{a}+3\vec{b})-4(2\vec{c}+3\vec{d}-\vec{a})+2(6\vec{d}-2\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c})=$$

$$2\vec{a}+6\vec{b}-8\vec{c}-12\vec{d}+4\vec{a}+12\vec{d}-4\vec{a}-4\vec{b}+6\vec{c}=2(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}).$$

Таким образом, необходимо построить графически выражение в скобках и затем умножить его на 2. Построение приведено на рис. 3.9 а), а результирующий вектор — на рис. 3.9 б). ▲



(а) (б)

Рис. 3.9

4. Линейные операции в физике

Рассмотрим физические задачи, в которых используются линейные операции над векторами.

4.1. Относительное движение

В механике иногда возникает необходимость рассмотрения движения одного и того же тела в разных системах отсчета (см.рис. 4.1).

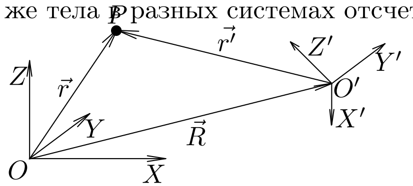
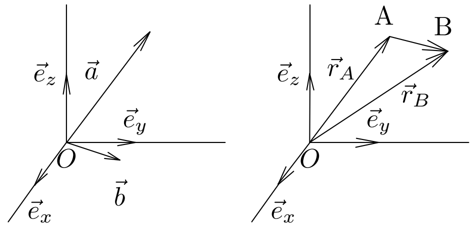


Рис. 4.1

Напомним, что ***системой отсчета*** в механике называют тело отсчета, вместе со связанной с ним системой координат и часами. В

динат, наиболее приспособленную к данной задаче. В настоящем пособии мы ограничимся рассмотрением декартовой системы координат, хотя имеется множество других, часто более удобных систем.

Пусть направленные отрезки, задающие единичный масштаб длины на декартовых осях, задаются единичными векторами: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ (рис. 5.4 а).



(а) (б)

Рис. 5.4

Тогда произвольный вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде ***разложения*** по этим векторам:

$$\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z. \tag{5.1}$$

Действительно, вектор $a_x\vec{e}_x$ по определению декартовой координаты a_x есть составляющая вектора $\vec{a}$ вдоль вектора $\vec{e}_x$, аналогично и для остальных компонент. Таким образом, словесная формулировка выражения (5.1) звучит вполне понятно: **всякий вектор равен векторной сумме своих составляющих вдоль декартовых ортов.** Числа a_x, a_y, a_z называются ***координатами вектора*** $\vec{a}$ в выбранной системе координат. Векторы в координатном представлении можно записать в виде разложения по ортам декартовой системы координат $\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z$, либо просто перечислить компоненты в скобках $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ — оба представления практически эквивалентны.

В другой системе координат координаты этого же вектора будут другими, а если координаты двух векторов в некоторой системе координат совпадают, то совпадают и векторы, причем их совпадение при этом будет иметь место и в любой другой системе координат. Подчеркнем, что **все операции с векторами должны производиться в одной системе координат.**

Легко сформулировать правила сложения векторов и их умноже-

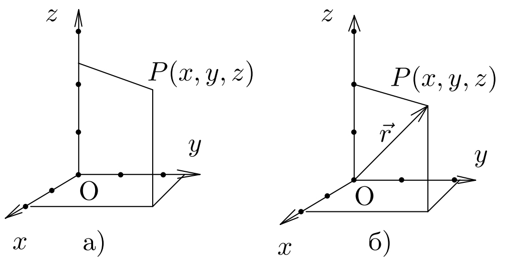


Рис. 5.3

Таким же образом задается в декартовой системе координат и любая другая векторная величина, только декартовы оси градуируются в единицах измерения этой физической величины: например в единицах скорости — [м/с].

Перейдем к координатному способу описания векторов.

5.3. Векторы и скалярное произведение в декартовой системе координат

Векторная величина является геометрическим объектом, определенным вне зависимости от того, задана система координат, или нет. Действительно, выбор системы координат для описания положений физических тел абсолютно произволен, а сами координатные оси — это оси воображаемые. В физике "векторность"(как и "скалярность") физических законов имеет первостепенное значение, так как выражает их универсальность. Например, векторное выражение $\vec{F} = m\vec{a}$, помимо чисто количественной связи разных физических величин, говорит о том, что **эта связь не зависит от выбора системы координат.** Собственно, в "строгой геометрии"векторы и определяются именно таким образом — как тройки чисел, которые при смене системы координат изменяются определенным и одинаковым (для всех векторов) образом[4].

Однако при решении конкретных физических уравнений при конкретных условиях необходимо выбрать определенную систему коор-

[4]Мы не конкретизируем здесь каким конкретно, т.к. это потребовало бы введения новых для вас математических объектов — матриц. Строго говоря, наше определение, на самом деле, "определяет"более широкий класс, так называемых, ***геометрических объектов***, частным случаем которых являются векторы и скаляры

классической механике время во всех системах отсчета течет одинаково, поэтому формулы, связывающие положения и скорости тела в разных системах отсчета, имеют простой вид:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}; \quad \vec{v} = \vec{V} + \vec{v'},$$

где $\vec{r}$ и $\vec{v}$ — положение и скорость материальной точки P относительно неподвижной системы отсчета, $\vec{r'}$ и $\vec{v'}$ — положение и скорость материальной точки P относительно подвижной системы отсчета, $\vec{R}$ и $\vec{V}$ — положение и скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Первая формула следует непосредственно из правила треугольника для векторов $\vec{r}, \vec{r'}, \vec{R}$ на рис. 4.1. Формула для скоростей получается, если рассмотреть два выражения с векторами $\vec{r}, \vec{r'}, \vec{R}$ для двух соседних моментов времени, вычесть из конечного начальное, и разделить обе части полученного векторного равенства на промежуток времени Δt. Рассмотрим типичный пример.

Пример 2. Пункт B расположен на расстоянии $\ell = 3$ км ниже по течению от пункта A (рис. 4.2). Ширина русла $h = 1$ км, скорость течения $v = 1$ км/ч, скорость катера относительно неподвижной воды — $v' = 5$ км/ч. Под каким углом φ к линии AB должен выбрать курс катер, чтобы попасть точно в пункт B?

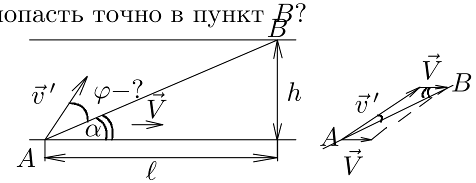


Рис. 4.2

Решение. Для того, чтобы катеру попасть точно в точку B, необходимо выбрать курс левее направления AB, чтобы учесть снос катера течением. В результате векторного сложения скорости катера со скоростью течения должен получиться вектор, параллельный направлению AB. Соответствующее геометрическое построение показано на отдельном рисунке справа. Чтобы получить числовое значение, рассмотрим векторный треугольник, образованный векторами скорости катера, скорости воды и суммарной скоростью — диагональю параллелограмма. По теореме синусов

$$\frac{\sin\varphi}{V} = \frac{\sin\alpha}{v'},$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{V}{v'}\sin\alpha.$$

Угол α найдем из геометрии задачи: $\operatorname{ctg}\alpha = \ell/h = 3$. Используя тригонометрическое тождество

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

и подставляя отношение скоростей находим:

$$\sin\varphi = \frac{1}{5\sqrt{10}},$$

значит $\varphi \approx 4^o$. (Для $\sin\varphi \ll 1$ справедливо равенство $\sin\varphi \approx \varphi()$, поэтому $\varphi \approx \frac{1}{5\sqrt{10}} \approx 4^o$. ▲

4.2. Сложение и разложение сил

Основной динамической величиной в механике, характеризующей взаимодействие различных физических тел, является ***сила***. Сила, в общем случае, есть причина изменения характера движения тел. Поскольку характер движения однозначно определяется вектором скорости[2], то сила — причина изменения скорости тела. В отсутствие сил тело движется прямолинейно и равномерно (т.е. не изменяет своего вектора скорости) или покоится. Вектор скорости тела также не будет изменяться в том случае, если действие всех сил скомпенсировано. Так как сила — величина векторная, то условие компенсации имеет вид равенства нулю векторной суммы:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0$$

где $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$ — совокупность всех сил, действующих на тело. Говорят, что в этом случае тело (материальная точка) находится в ***состоянии равновесия.*** Векторная сумма, стоящая слева и, в общем случае, не равная нулю, называется ***равнодействующей*** сил, действующих на тело и именно она определяет характер движения тела в общем случае. Равнодействующая всех сил имеет, как правило, точку приложения в центре масс, который у симметричных тел всегда

[2]Речь идет о материальной точке.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}$; **2.** $\vec{a}^2$; **3.** $\vec{b}^2$; **4.** $(\vec{a}+\vec{b})^2$; **5.** $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; **6.** $(\vec{a}-\vec{b})^2$; **7.** $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

Решение. Учитывая, что $\cos(2\pi/3) = -1/2$ находим:
1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot4\cdot(-1/2) = -6$; **2.** $\vec{a}^2 = 9$; **3.** $\vec{b}^2 = 16$;
4. $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2\cdot(-6) + 16 = 13$;
5. $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 27 - 24 - 64 = -61$;
6. $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 12 + 16 = 37$
7. $(3\vec{a}+2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 81 - 72 + 64 = 73$. ▲

5.2. Понятие системы координат. Декартова система координат. Радиус-вектор.

Практическое решение любой физической задачи так или иначе связано с выбором определенной ***системы координат***. Вообще, **под системой координат понимают совокупность чисел, которая каким-либо образом перечисляет все точки пространства, причем каждой точке пространства соответствует один и только один набор из всей совокупности чисел.** Конкретный выбор системы координат диктуется соображениями удобства, условиями задачи, симметрией физической системы и другими факторами. Однако, число координат в различных системах остается неизменным, так как равно размерности пространства.

Декартова система координат (x, y, z), задается выбором начала O и тремя взаимноперпендикулярными ориентированными осями, проходящими через начало, с зафиксированными направлениями в пространстве.

На каждой оси задается некоторый масштаб длины (отрезок единичной длины), с помощью которого ось градуируется, и соответствие между точками пространства и тройками чисел определяется известным способом с помощью перпендикуляров к осям (рис. 5.3 а).

Можно убедиться, что такое соответствие каждую точку пространства наделяет единственной тройкой чисел (x, y, z), и наоборот, каждой такой тройке сопоставляет единственную точку пространства. Точки пространства часто описывают с помощью так называемого ***радиус-вектора***, который начинается в точке O и показывает заданную точку пространства (рис. 5.3 б).

а угол между ними как

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}\sqrt{(\vec{b},\vec{b})}}.$$

Оказывается, что свойство евклидовости гарантирует неотрицательность подкоренных выражений и условие $\cos\varphi \le 1$ для косинуса, вычисленного через скалярные произведения.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 6. (Теорема косинусов) Докажем известную теорему косинусов векторным методом, используя понятие скалярного произведения.

Теорема косинусов гласит: **квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.**

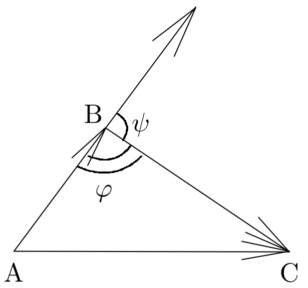


Рис. 5.2

Доказательство. Записывая векторное равенство (рис. 5.2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, имеем равенство скалярных квадратов его левой и правой частей:

$$\overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 =$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

Остается заметить, что угол ψ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ и угол φ между сторонами AB и BC связаны соотношением: $\psi + \varphi = \pi$. Расписывая скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\psi$, и учитывая, что $\cos\psi = -\cos\varphi$, получаем утверждение теоремы:

$$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - 2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\varphi. \ \blacktriangle$$

Пример 7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 2\pi/3$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить:

расположен в центре или на оси симметрии. В системе СИ сила измеряется в Ньютонах. Сила в 1 Н — это такая сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2.

Раздел механики, изучающий всевозможные условия равновесия тел в различных физических ситуациях называется ***статикой***. ***Динамикой*** называется раздел механики, изучающий взаимосвязь различных сил действующих на тело и связь этих сил с характером движения тела. Оба раздела дополняют друг друга и в совокупности позволяют решить основную задачу механики: определение при заданных условиях положения тела в любой момент времени.

Рассмотрим кратко основные типы сил, встречающиеся в повседневной жизни и в различных задачах.

1. ***Сила тяжести.*** Эта сила удерживает все предметы на Земле. В любой точке поверхности Земли она направлена к ее центру и пропорциональна массе тела (рис.4.3 а). Коэффициент пропорциональности называется ***ускорением свободного падения*** $g = 9,8$ ***м/с***^{2}, который практически одинаков для всех точек поверхности земного шара. С таким ускорением падали бы все тела вблизи поверхности Земли в отсутствие атмосферы[3]. Векторная форма записи силы тяжести имеет вид: $\vec{F}_т = m\vec{g}$, где $\vec{g}$ — вектор ускорения свободного падения, направленный вертикально вниз (к центру Земли) (рис. 4.3 б).

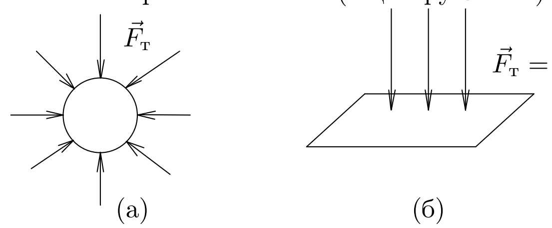


Рис. 4.3

2. ***Силы реакции опор, подвесов.*** Сила тяжести относится к классу так называемых ***активных сил***, так как для ее действия не нужно присутствие других сил. Силы реакции опор и подвесов относятся к классу ***пассивных*** сил, так как они проявляются только как ответная реакция на какие-нибудь внешние активные силы и сами по себе не возникают. Представьте, что книга покоится на горизонталь-

[3]Воздух оказывает разное сопротивление телам разной массы, размеров и формы.

ном столе (рис. 4.4 а).

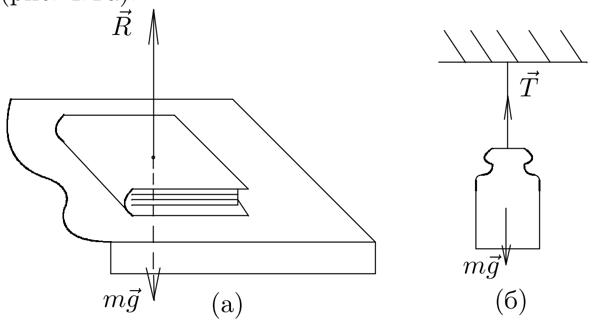


Рис. 4.4

Условия ее равновесия имеют вид: $m\vec g + \vec N = 0$ или $\vec N = -m\vec g$. Таким образом сила реакции $\vec N$ стола на силу тяжести книги такова, что она ее в точности компенсирует. Силы реакции опоры возникают на месте ее соприкосновения с телом. Часто из общей силы реакции выделяют ***силу нормальной реакции***, которые направлены по нормали к соприкасающимся поверхностям.

Аналогично, подвешенное на нити тело будет находится в равновесии, если сила тяжести будет скомпенсирована силой натяжения нити (рис. 4.4 б): $m\vec g + \vec T = 0$ или $\vec T = -m\vec g$. Сила натяжения нити всегда направлена от ее концов к середине. И силы реакции опор и силы натяжения нитей обусловлены упругостью тел и сводятся в конечном счете к силам межмолекулярного взаимодействия.

3. ***Силы трения.*** Эти силы относятся к, так называемому, классу ***диссипативных*** сил (от лат. "dissipatio— поглощение), так как они, как правило, приводят к превращению всей механической энергии тела или ее части в тепловую энергию, идущую на нагревание тела и его окружения. Они возникают в местах соприкосновения различных тел, направлены по касательной к их поверхностям и в общем случае зависят от многих факторов. Разберем простейшие случаи — силы трения покоя и скольжения.

Пусть брусок покоится на шероховатом горизонтальном столе (рис. 4.5 а). Подействуем на него силой $\vec F$ в горизонтальном направлении, причем будем плавно наращивать от нуля ее абсолютную величину. Вплоть до некоторого значения модуля силы $F = F_{\text{с}}$ брусок не сдвинется с места и будет выполняться условие равновесия: $\vec F + \vec F_{\text{тр}} = 0$. Таким образом, вплоть до $F = F_{\text{с}}$ сила трения бруска о

Проясним геометрический смысл скалярного произведения. Для этого заметим, что произведение $|\vec b|\cos\varphi$ в определении представляет собой проекцию вектора $\vec b$ на направление вектора $\vec a$ и наоборот, $|\vec a|\cos\varphi$ — проекция вектора $\vec a$ на направление вектора $\vec b$. Эти выражения, с другой стороны, являются, с точностью до знака, длинами соответствующих составляющих: $\vec b'$ — составляющей вектора $\vec b$ вдоль направления $\vec a$ и $\vec a'$ — составляющей вектора $\vec a$ вдоль направления $\vec b$ рис. 5.1 б). Таким образом, получаем другие формы представления скалярного произведения:

$$(\vec a, \vec b) = |\vec a|\text{Пр}_{\vec a}\vec b = \pm|\vec a|\cdot|\vec b'| = |\vec b|\text{Пр}_{\vec b}\vec a = \pm|\vec b|\cdot|\vec a'|,$$

где $\text{Пр}_{\vec a}\vec b$ — обозначение проекции вектора $\vec b$ на направление вектора $\vec a$ (см. определение проекции). Мы приходим к выводу, что операция скалярного произведения тесно связана с операцией проектирования векторов.

Опираясь на определение скалярного произведения, можно установить его следующие очевидные свойства:

1. $(\vec a, \vec b) = (\vec b, \vec a)$ — свойство ***коммутативности***;

2. $(\lambda\vec a + \mu\vec b, \vec c) = \lambda(\vec a, \vec c) + \mu(\vec b, \vec c)$ — свойство ***линейности***;

3. Если $(\vec a, \vec b) = 0$, то $\vec a \perp \vec b$. При этом считается, что нулевой вектор перпендикулярен всем векторам.

4. $(\vec a, \vec a) \geq 0$, причем равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда $\vec a = 0$.

Последнее свойство называется свойством ***евклидовости скалярного произведения***, а пространство с определенным в нем евклидовым произведением — ***евклидовым пространством.*** Все перечисленные свойства нетрудно проверить, используя определение скалярного произведения.

Мы определили скалярное произведение через понятие длины и угла, исходя из соображений наглядности. Покажем теперь, что экономнее обратный путь: определить и длину и угол через одну операцию скалярного произведения. Действительно, для двух векторов $\vec a$ и $\vec b$ их длины можно определить по формулам

$$|\vec a| = \sqrt{(\vec a, \vec a)}; \quad |\vec b| = \sqrt{(\vec b, \vec b)},$$

5. Скалярное произведение векторов

Известно, что исторически геометрия появилась как область знания, содержащая накопленный опыт по измерению углов, длин, площадей и объемов. С точки зрения современной геометрии все эти понятия можно связать с одним более общим понятием — ***скалярным произведением векторов в пространстве.*** В этом разделе мы разберем основные свойства скалярного произведения и его применение в физике.

5.1. Определение и формы представления скалярного произведения

Наиболее простое определение скалярного произведения опирается на понятие ***длины*** или ***абсолютной величины*** вектора. При этом в элементарной геометрии используется интуитивное представление о векторе, как направленном отрезке: под длиной вектора понимается длина отрезка, изображающего вектор. В физике, как уже упоминалось, длина вектора выражает число некоторых принятых эталонных единиц векторной физической величины. Длина вектора обозначается двумя вертикальными чертами (как модуль): например $|\vec{a}|$ — длина (абсолютная величина или модуль) вектора $\vec{a}$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними — $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

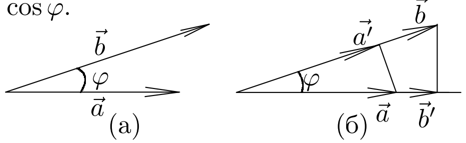


Рис. 5.1

Угол между векторами берется, как показано на рис. 5.1 а). Подчеркнем, что скалярное произведение зависит только от длин векторов, их взаимного расположения и совсем не зависит от выбора системы координат — мы ее вообще не использовали в определении.

Широко используется две формы записи скалярного произведения: первая — $(\vec{a}, \vec{b})$ (чаще используемая в геометрии), вторая — $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (чаще используемая в физике). Мы будем, по мере необходимости, использовать оба способа обозначения.

поверхность стола в точности компенсирует внешнюю силу и поэтому ведет себя подобно пассивным силам реакции (участок 1 графика на рис. 4.5 б). Такая сила трения называется ***силой трения покоя.***

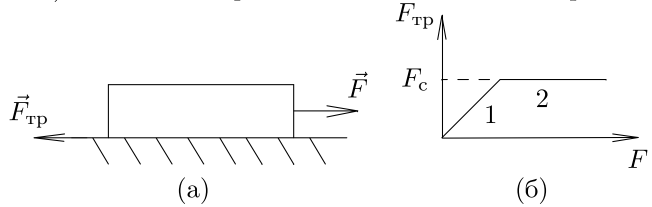


Рис. 4.5

При $F \geq F_{\text{с}}$ брусок движется, сила трения становится практически постоянной и равной по модулю $F_{\text{с}}$ (участок 2 графика на рис. 4.5 б) и называется в этом случае ***силой трения скольжения.*** Экспериментально установлено, что модули силы трения скольжения тела о поверхность и силы реакции поверхности пропорциональны друг другу, т.е. $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu|\vec{N}|$. При этом коэффициент пропорциональности μ называется ***коэффициентом трения.*** Он зависит от рода соприкасающихся поверхностей, степени их обработки и измеряется экспериментально. Отметим, что сила трения покоя направлена против внешней силы, ее вызывающей, а сила трения скольжения — против относительной скорости движения соприкасающихся тел.

К силам трения также относятся сила трения качения, сила аэро- и гидродинамического сопротивления. Природа сил трения — такая же как у сил реакции, но межмолекулярное взаимодействие в этом случае может быть неупругим.

Из самого определения равнодействующей сил ясно, что ее нахождение связано с операцией сложения сил. Обратная операция — разложение силы на составляющие вдоль заданных направлений — используется для нахождения каких-нибудь составляющих, например сил реакции. ***Составляющей вектора вдоль данного направления*** называется вектор, начало и конец которого упираются в перпендикуляры, опущенные из начала и конца исходного вектора на данное направление (рис. 4.6).

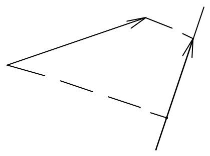
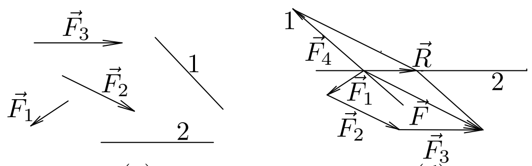


Рис. 4.6

Проекция вектора на данное направление — это абсолютная величина составляющей вдоль данного направления, взятая со знаком "+ ", если данное направление и направление составляющей совпадают, и со знаком "− ", если эти направления противоположны.

Напомним, что в состоянии равновесия равнодействующая всех сил, действующих на данное тело, равна нулю.

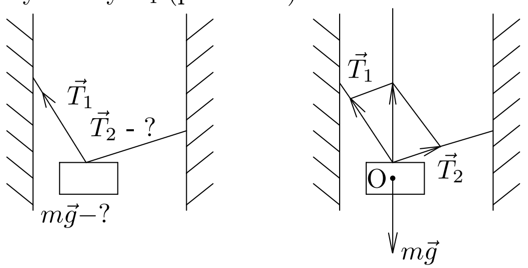
Пример 3. На рис. 4.7 а) изображены три силы, действующие на материальную точку. Какую силу в направлении 1 нужно добавить, чтобы равнодействующая всех сил была направлена вдоль направления 2?



(а) (б)

Рис. 4.7

Решение. Найдем равнодействующую трех сил $\vec{F}$, данных в условии (рис. 4.7 б). Полученный вектор, а также два заданных направления достаточны для построения параллелограмма сил, из которого находим искомую силу $\vec{F}_4$ (рис. 4.7 б). ▲



(а) (б)

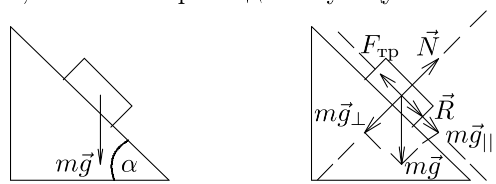
Рис. 4.8

Пример 4. Груз подвешен на двух нитях, как показано на рис. 4.8 а). Сила натяжения левой нити известна $\vec{T}_1$, она показана

на рис. 4.8 а). Найти графически силу тяжести $m\vec{g}$ и силу натяжения правой нити $\vec{T}_2$.

Решение. Поскольку груз находится в равновесии, имеем векторное равенство: $m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$. Продолжим линию действия силы тяжести вертикально вверх за точку O (рис. 4.8 б)). На этой линии лежит диагональ параллелограмма сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. Из конца вектора $\vec{T}_1$ проведем линию, параллельную $\vec{T}_2$. Точка пересечения с вертикалью даст равнодействующую сил натяжения, которая компенсирует силу тяжести. Проводя из конца равнодействующей линию параллельную $\vec{T}_1$, получим вторую силу натяжения $\vec{T}_2$. ▲

Пример 5. Брусок соскальзывает по наклонной плоскости с углом $\alpha = 45^0$. Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 1/2$. Вектор силы тяжести показан на рис. 4.9 а). Построить все силы действующие на брусок, и найти их равнодействующую.



(а) (б)

Рис. 4.9

Решение. Вектор нормальной реакции $\vec{N}$ направлен по нормали к наклонной плоскости и по модулю равен проекции силы тяжести $\vec{m}g_\perp$ на направление нормали к наклонной плоскости (условие компенсации сил по нормали к наклонной плоскости) (рис. 4.9 б)). Вектор силы трения $\vec{F}_{тр}$ направлен против движения (вверх по наклонной плоскости) и по абсолютной величине равен: $F_{тр} = \mu N = (1/2)N = mg/2\sqrt{2}$. Складывая векторно $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$ находим равнодействующую $\vec{R}$. Она направлена вниз по наклонной плоскости и по абсолютной величине равна разности проекции вдоль наклонной плоскости силы тяжести $m\vec{g}_{||}$ и модуля силы трения:

$$\frac{mg}{\sqrt{2}} - F_{тр} = \frac{mg}{2\sqrt{2}}. ▲$$